This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABN6625
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B46056
035/2: : |a (CaOTULAS)160035801
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Maleyx, L.
245:00: |a Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur défintion, |c par m. L. Maleyx.
260: : |a Paris, |b Gauthier-Villars et fils, |c 1891.
300/1: : |a 2 p. L., 140 p. |b incl. diagrs. |c 23 cm.
500/1: : |a "Extrait des Nouvelles annales de mathématiques, 3e série, t. XI et XII, 1890-1891."
650/1: 0: |a Conic sections
998: : |c WFA |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

Hosted by Google

Hosted by Google

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES

D'APRÈS LEUR DÉFINITION.

Hosted by Google

Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série,
t. XI et XII, 1890-1891.

Hosted by Google

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES

D'APRÈS LEUR DÉFINITION;

PAR M. L. MALEYX,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES AU COLLÈGE STANISLAS.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

(Tous droits réservés.)

Hosted by Google

Hosted by Google

AVERTISSEMENT.

L'étude présente est le résumé des propriétés les plus remarquables des sections planes du cône à directrice circulaire, rangées, autant que je l'ai pu, dans l'ordre chronologique de leur découverte, et démontrées par les moyens les plus élémentaires que j'aie à ma disposition.

Je suis convaincu de ce fait que : *l'esprit de l'individu doit se développer,* **au mieux**, *dans l'ordre où s'est développé l'esprit du genre.*

J'ai fait mes efforts pour mettre mon travail à la portée des élèves des cours élémentaires, et pour leur donner la possibilité de s'en servir utilement. Les propriétés de l'involution, dont je me sers, s'introduisent d'une manière naturelle, indépendamment de l'homographie, et presque sans calcul.

Malgré le peu de connaissances que je demande, je crois être parvenu, sans le secours de l'Analyse, à mettre en évidence des propriétés utilisables dans l'étude de la Géométrie descriptive; je ne citerai dans cet ordre, que le théorème du n° VI, Chapitre II, permettant de construire les points communs d'une droite et d'une conique définie par cinq points, et la construction des points communs de deux coniques définies ayant un diamètre commun connu, établie au n° IV du Chapitre III.

Hosted by Google

Enfin, pour ne rien laisser à désirer aux élèves dont les connaissances ne seraient pas suffisantes, j'ai cru devoir placer en tête de mon travail une Introduction renfermant le rappel ou la démonstration des propositions que je dois invoquer le plus fréquemment.

Hosted by Google

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES

D'APRÈS LEUR DÉFINITION.

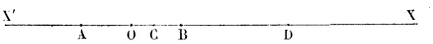
INTRODUCTION.

1. Une longueur déterminée comptée sur une droite fixe, à partir de l'un de ses points, porte le nom de *segment*.

Ce segment peut être mesuré au moyen d'une unité de longueur arbitraire, et, d'après la convention de Descartes, on affecte du signe + les nombres représentant les segments comptés dans un sens, et du signe — ceux qui représentent les segments comptés en sens contraire ; ou, encore, on considère les nombres représentant ces segments comme positifs ou négatifs, suivant que les segments sont comptés dans un sens ou dans l'autre.

Deux points fixes, A, B, étant donnés sur une droite

Fig. I.



indéfinie X'X (*fig.* I), on suppose démontré qu'il existe toujours, et qu'il n'existe sur X'X que deux points C,

Hosted by Google

D, dont le rapport des distances aux deux points A, B, ait une même valeur numérique donnée; l'un de ces points étant compris entre A et B, l'autre sur une des parties extérieures à cet intervalle. Il en résulte qu'au point de vue de la convention des signes précitée, ces deux rapports sont de signes contraires, puisque les segments comptés à partir du point intermédiaire entre A et B sont de sens contraires, tandis que ceux qui sont comptés à partir de l'autre point sont de mêmes sens.

2. On dit que les deux points C, D, dont il est question dans le numéro précédent sont **conjugués harmoniques** par rapport à A et B.

Réciproquement, *on peut considérer* A *et* B *comme conjugués harmoniques par rapport à* C *et* D, car de l'égalité de définition,

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}, \tag{1}$$

on peut conclure par le changement d'ordre des moyens,

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}.$$

L'égalité définissant la condition pour que deux points C, D soient conjugués harmoniques par rapport à deux autres A, B est susceptible de plusieurs formes équivalentes.

1° Si nous reportons l'origine des distances au point extérieur (*fig.* I), l'égalité (1) devient

$$\frac{DA - DC}{DC - DB} = \frac{DA}{DB}.$$

Cette égalité peut être remplacée par l'égalité équivalente obtenue en retranchant terme à terme le premier

Hosted by Google

rapport du second, soit

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{2DB - DC},$$

celle-ci par celle qu'on obtient en ajoutant à chaque dénominateur le numérateur, ce qui donne

$$\frac{DA}{DA + DB} = \frac{DC}{2DB}.$$

Enfin, la dernière peut évidemment prendre la forme,

$$(2) \qquad \frac{1}{DC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{DA} + \frac{1}{DB}\right),$$

équivalente à l'égalité (1).

De même, si nous reportons l'origine des distances au point intérieur C, l'égalité (1) donne, par des transformations analogues, les égalités équivalentes successives,

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CA + CD}{CD - CB},$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CD - 2CB},$$

$$\frac{CA}{CA - CB} = \frac{CD}{2CB},$$

$$(3) \qquad \frac{1}{CD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{CB} - \frac{1}{CA}\right).$$

Les égalités (2) et (3), respectivement équivalentes à l'égalité (1), sont susceptibles d'une forme unique; si nous désignons par α et β les nombres positifs ou négatifs représentant les distanees de l'un des points C ou D aux points A et B, respectivement, et par δ le nombre positif ou négatif représentant la distance des points C, D, on aura, quelle que soit celle des égalités (2) ou (3)

Hosted by Google

que l'on considère,

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right).$$

2° Reportons maintenant l'origine des distances au point O, milieu du segment AB (*fig.* I); l'égalité (1) devient

$$\frac{CO + OA}{OB - OC} = \frac{OA + OD}{OD - OB}.$$

Intervertissons l'ordre des moyens, ajoutons et retranchons terme à terme les deux rapports résultants, on a, en observant que OA = OB,

$$\frac{CO + OA}{OA + OD} = \frac{OB - OC}{OD - OB} = \frac{OA - OC}{OD - OA} = \frac{2OA}{2OD} = \frac{2OC}{2OA}.$$

L'égalité des deux derniers rapports, équivalente à l'égalité (1), nous donne comme condition pour que les points C et D soient conjugués harmoniques par rapport aux deux points A et B, que la demi-distance de ces deux derniers points soit moyenne proportionnelle entre les distances du point milieu O, du segment AB, aux deux points C et D. Il est, du reste, évident que les deux points C et D sont d'un même côté par rapport au point O.

3. Si l'on trace quatre droites passant par un point fixe S, et rencontrant une droite, X'X, en quatre points A, B, C, D, tels que les deux derniers soient conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers, ces quatre droites forment un faisceau harmonique.

Les droites illimitées SA, SB, SC, SD, sont dites *rayons du faisceau,* et l'on nomme *rayons conjugués* ceux qui passent par deux points conjugués; nous désignerons un tel faisceau par S.ABCD.

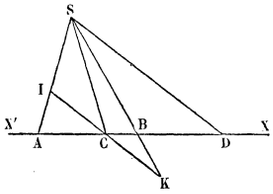
Hosted by Google

Théorème I. — *Si l'on coupe un faisceau harmonique par une parallèle à un des rayons, le rayon conjugué divise en parties égales le segment de cette parallèle compris entre les deux autres rayons.*

Il suffit d'établir la proposition pour une de ces parallèles, puisque toutes les autres sont divisées par trois droites issues d'un point dans un même rapport.

Soit S.ABCD le faisceau harmonique considéré, coupant X'X aux points A, B, C, D, tels que les deux derniers soient conjugués harmoniques des deux premiers (*fig.* II), par le point C menons la parallèle au rayon

Fig. II.



SD, conjugué de SC, et rencontrant les rayons SA, SB, aux points I et K respectivement.

De la similitude des deux couples de triangles AIC, ASD, d'une part; CBK, SBD, d'autre part; on déduit les proportions

$$\frac{IC}{SD} = \frac{AC}{AD}, \qquad \frac{CK}{SD} = \frac{CB}{BD},$$

mais, par définition,

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB},$$

d'où

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{BD}.$$

De la dernière égalité, et par comparaison avec celles

Hosted by Google

qui précèdent de deux rangs, on déduit

$$\frac{IC}{SD} = \frac{CK}{SD},$$

et, en conséquence,

$$IC = CK,$$

qui démontre le théorème énoncé.

Théorème II. — Réciproquement, *si quatre droites issues d'un point sont tellement placées qu'une parallèle à l'une d'elles soit divisée par les trois autres en deux parties égales, ces quatre droites forment un faisceau harmonique, et le rayon qui passe par le milieu du segment est conjugué de celui qui est parallèle au même segment.*

Soient SA, SB, SC, SD quatre droites issues du point S; ICK une parallèle à SD divisée en deux parties égales par les droites SA, SC, SB, aux points I, C, K; par le point C menons la droite quelconque, X′X, rencontrant SA, SB, SC, SD, aux points A, B, C, D (*fig.* II).

De la similitude des deux couples de triangles AIC, ASD, d'une part; CBK, SBD, d'autre part; on déduit les proportions

$$\frac{IC}{SD} = \frac{AC}{AD}, \qquad \frac{CK}{SD} = \frac{CB}{BD}.$$

Or, comme par hypothèse, IC = CK, les premiers membres de ces égalités sont identiques, et l'on en déduit

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

ou

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Hosted by Google

Les points C et D sont donc conjugués harmoniques par rapport à A et B, et le faisceau S.ABCD est harmonique, ce qui établit le théorème énoncé.

Remarque I. — Il résulte des deux propositions précédentes que *si les quatre rayons d'un faisceau coupent harmoniquement une droite, ils couperont aussi harmoniquement toute autre droite.*

Remarque II. — Il résulte du théorème II que : *deux droites qui se coupent et le système des bissectrices de leurs angles forment un faisceau harmonique, puisque une parallèle à une des bissectrices est divisée par l'autre et les deux droites données en deux parties égales.*

Et il résulte du théorème I que, réciproquement, *si deux rayons conjugués d'un faisceau harmonique sont rectangulaires, ils divisent en parties égales les angles formés par les deux autres rayons;* car, si l'on mène une sécante parallèle à un des rayons rectangulaires, elle sera perpendiculaire au rayon conjugué et divisée par lui et les deux autres rayons en deux parties égales ; elle formera donc avec ces deux rayons un triangle isoscèle dans lequel la droite qui unit le sommet au milieu de la base, et qui est un des rayons rectangulaires du faisceau, divise l'angle du sommet en deux parties égales.

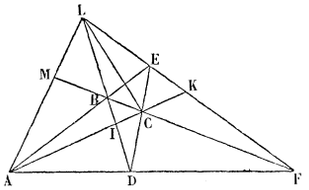
4. Quatre droites situées dans un plan se rencontrent deux à deux en six points, et forment une figure ABCDEF (*fig.* III), qui porte le nom de **quadrilatère complet**; les six points sont les sommets, et l'on donne le nom de *diagonale* à chacune des trois droites unissant deux sommets sans se confondre avec l'une des quatre droites considérées.

Hosted by Google

Théorème. — *Chaque diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les sommets qu'elle unit, et les deux autres diagonales.*

Considérons les deux diagonales DB, FE, qui se coupent en L ; soit K le point conjugué harmonique de L par rapport à E et F ; le faisceau C.EFLK est harmonique, et le rayon CK passe au point conjugué harmo-

Fig. III.



nique de L par rapport à B et D (n° 3, Remarque I). De même, le faisceau A.EFLK est aussi harmonique, et le rayon AK passe au point conjugué harmonique de L par rapport à B et D, soit I ce point. Les droites KC, AK, ont donc deux points communs I et K et se confondent suivant la diagonale AC, qui, dès lors, divise harmoniquement les deux autres LBD, LEF aux points I et K.

Le faisceau A.EFLK étant harmonique partage harmoniquement la droite BF aux points M et C ; il en résulte que le faisceau L.BFMC est harmonique et divise harmoniquement la diagonale AC aux points I et K où elle rencontre les deux autres.

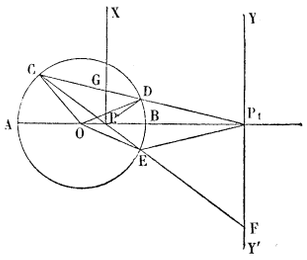
5. On appelle **polaire d'un point, par rapport à un cercle,** *le lieu géométrique du point conjugué harmonique du point considéré, qui porte le nom de* **pôle**, *par rapport aux deux points de rencontre avec la circonférence d'une sécante variable autour du pôle. Ce*

Hosted by Google

lieu géométrique est une droite perpendiculaire au diamètre passant par le pôle, et on lui donne le nom de **polaire**.

Considérons le cercle O (*fig.* IV) : sur le diamètre AB, prenons les points P et P_1 conjugués harmoniques par rapport à A et B; si l'on désigne par R le rayon du

Fig. IV.



cercle, on a la relation $R^2 = OP \times OP_1$ (n° 2, 2°). Menons par le point P_1 la sécante variable P_1DC, puis traçons les droites CPE, OC, OD, OE, PD, P_1E, puis les perpendiculaires PX, P_1Y à AB.

De l'égalité $R^2 = OP \times OP_1$, on déduit

$$\overline{OC}^2 = OP \times OP_1 \qquad \text{et} \qquad \overline{OE}^2 = OP \times OP_1;$$

d'où la similitude des couples de triangles COP, COP_1, et EOP, EOP_1, puisqu'ils ont un angle égal en O compris entre côtés proportionnels; il en résulte les égalités d'angles homologues $OCP = OP_1C$, et $OEP = OP_1E$; mais les angles OEC, OCE sont égaux comme angles à la base du triangle isoscèle COE; donc PP_1 est bissectrice de l'angle CP_1E, et le faisceau P_1PFEC est harmonique (n° 3, Remarque II). En conséquence, le lieu du point conjugué harmonique de P, par rapport aux points C, E, où la sécante variable autour de P ren-

Hosted by Google

contre la circonférence est la droite P_1Y perpendiculaire à AB en P_1.

Les trois triangles COP_1, DOP_1, EOP_1 ont, deux à deux, deux côtés égaux, ainsi que l'angle opposé à l'un d'eux; or les deux derniers ne peuvent être égaux au premier, puisque les angles ODP_1, OEP_1 sont respectivement supplémentaires de l'angle OCP_1, le premier comme supplément de ODC qui est égal à OCP_1 d'après la propriété du triangle isoscèle, le second parce qu'il est opposé à OCP_1 dans le quadrilatère $COEP_1$ qui est inscriptible à cause de l'égalité d'angles OEC, OP_1C.

Les deux triangles ODP_1, OEP_1 ne pouvant être égaux à COP_1 sont égaux entre eux, et l'on en conclut l'égalité des angles DOP_1, EOP_1, et, en conséquence, celle des triangles DOP, EOP, qui ont un angle égal compris entre côtés égaux.

De là résulte que les angles DPP_1, EPP_1 sont égaux; dès lors les droites PP_1, PX sont les bissectrices des angles formés par PC et PD; ces quatre droites forment donc un faisceau harmonique, et le lieu du point conjugué harmonique de P_1 par rapport aux points C et D, où la sécante variable P_1DC rencontre la circonférence est la droite PX perpendiculaire à AB en P.

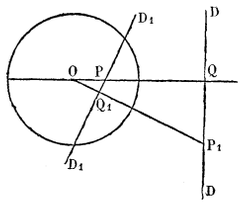
On peut remarquer que, dans tous les cas, le produit des distances du pôle et de la polaire au centre est égal au carré du rayon; si le pôle est intérieur à la circonférence, la polaire est complètement extérieure; si le pôle est extérieur, la polaire est sécante à la circonférence, et, enfin, si le pôle est sur la circonférence, la polaire lui est tangente au pôle.

6. **Théorème.** — *Si le pôle* P *d'une droite* D *est situé sur une droite* D_1, *réciproquement le pôle* P_1 *de la droite* D_1 *est situé sur la droite* D.

Hosted by Google

Soient O un cercle, D une droite de son plan (*fig.* V), le pôle P de cette droite se trouve sur la perpendiculaire OQ abaissée du centre O sur la droite D, et défini par l'égalité $OP \times OQ = R^2$, R étant le rayon du cercle O. Considérant une droite D_1 passant par le point P, du point O abaissons OQ_1 perpendiculaire

Fig. V.



sur D_1 et prenons sur OQ_1 le point P_1 défini par l'égalité $OQ_1 \times OP_1 = R^2$; P_1 sera le pôle de la droite D_1, joignons-le au point Q par une ligne droite. Les deux produits $OP \times OQ$, $OQ_1 \times OP_1$ étant égaux à R^2 sont égaux entre eux, dès lors le quadrilatère PQP_1Q_1 est inscriptible; ses angles opposés sont supplémentaires, et, comme l'angle Q_1 est droit, il en est de même de P_1QP; P_1Q est donc perpendiculaire sur OQ et se confond avec la droite D; il en résulte que le pôle P_1 de la droite D_1 se trouve sur la droite D.

Corollaire I. — *Si une droite* D_1 *tourne autour d'un point fixe* P, *pris dans le plan d'un cercle, son pôle* P_1 *décrit la polaire du point* P.

Corollaire II. — *Si le pôle* P_1 *d'une droite variable* D_1 *décrit une droite fixe* D, *la droite* D_1 *tourne autour d'un point fixe* P, *pôle de la droite* D.

Hosted by Google

CHAPITRE I.

Définitions ; classification des sections coniques en trois genres.

I. On donne le nom de *cône à base circulaire* à la surface illimitée engendrée par une droite qui s'appuie constamment sur une circonférence de cercle, et qui, dans son mouvement, ne cesse de passer par un point fixe pris hors du plan de la circonférence ; ce point porte le nom de *sommet du cône*.

Le sommet d'un cône divise sa surface en deux parties illimitées qui ont reçu le nom de *nappes*.

On appelle *section conique*, ou simplement *conique*, l'intersection d'un cône à base circulaire par un plan.

Un plan mené par le sommet d'un cône peut avoir par rapport à lui trois positions distinctes ; il peut laisser les deux nappes de part et d'autre si sa trace sur le plan de la directrice circulaire ne rencontre pas cette ligne ; dans ce cas, le plan n'a de commun avec le cône que le sommet ; il peut couper le plan de la directrice circulaire suivant une tangente à cette ligne ; dans ce cas, il laisse encore les deux nappes de part et d'autre, mais il a en commun avec le cône deux génératrices confondues suivant celle qui passe par le point de contact, il est alors tangent tout le long de cette génératrice ; enfin sa trace sur le plan de la directrice circulaire rencontre cette ligne en deux points, et alors le plan coupe le cône suivant deux génératrices distinctes.

Hosted by Google

Un plan sécant quelconque est nécessairement parallèle à une des trois positions de plans qu'on vient d'énumérer : de là trois genres de sections. S'il est parallèle à un plan situé dans la première position, il coupe toutes les génératrices sur une même nappe et donne lieu à une section limitée et fermée : c'est la section du genre elliptique ; s'il est parallèle à un plan situé dans la deuxième position, il rencontre encore toutes les génératrices sur une même nappe, sauf celle qui est située dans le plan parallèle mené par le sommet, et donne lieu à une section illimitée composée d'une seule partie : c'est la section du genre parabolique ; enfin, s'il est parallèle à un plan situé dans la troisième position, il rencontre les génératrices sur les deux nappes, sauf celles qui sont situées dans le plan parallèle mené par le sommet, et donne lieu à une section composée de deux parties illimitées : c'est la section du genre hyperbolique.

Il est évident, par considération d'homothétie, que la section par un plan parallèle à celui de la directrice circulaire, et qui est du genre elliptique, d'après ce que nous venons de voir, est aussi circulaire. Il est encore évident, par définition, qu'une section conique ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points, car, s'il en était ainsi, le plan passant par cette droite et le sommet couperait la surface du cône suivant plus de deux droites, et sa trace sur le plan du cercle directeur couperait sa circonférence en plus de deux points.

On appelle *centre d'une courbe* un point qui divise en deux parties égales toutes les sécantes rectilignes qui passent par ce point et qui sont limitées à la courbe de part et d'autre.

On donne le nom de *diamètre* au lieu géométrique du

Hosted by Google

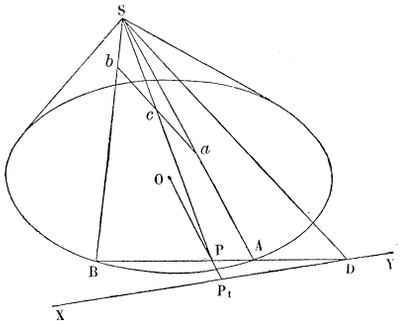
point milieu d'une sécante, limitée de part et d'autre à une courbe, lorsque cette droite se déplace parallèlement à une direction fixe.

Un diamètre rectiligne perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales est un *axe*, et ses points communs avec la courbe sont des *sommets* de cette ligne.

Du centre et des diamètres dans l'ellipse; premières propriétés de direction.

II. *La section elliptique a un centre.* — Soit le cône circulaire dont le sommet est S et O le cercle directeur (*fig.* 1); menons par le sommet un plan parallèle au

Fig. 1.



plan sécant; il coupera le plan de la base circulaire suivant une droite, XY, extérieure au cercle directeur.

Soit P le pôle de XY par rapport au cercle, unissons le pôle P au sommet S, cette droite coupera le plan sécant en un point c; faisons passer par SP un plan variable, coupant le cercle directeur en A et B et la polaire XY de P en D; construisons les génératrices SA, SB, suivant lesquelles le plan auxiliaire coupe le

Hosted by Google

cône, et traçons également la droite SD. Le plan auxiliaire coupera le plan de la section, qui est parallèle au plan SXY, suivant une parallèle à SD passant par le point c, et rencontrant les génératrices SA, SB, aux points a et b qui appartiendront à la section; or le faisceau S. ABDP est harmonique : dès lors la droite acb, parallèle au rayon SD, est divisée par le point fixe c en deux parties égales.

Les points de la section sont donc situés deux à deux en ligne droite avec le point fixe c, qui divise leur distance en deux parties égales; c est donc un centre de la section, et l'on doit remarquer qu'il est situé à l'intersection du plan de la section avec la droite qui unit le sommet du cône au pôle de la trace, sur le plan et la base circulaire, du plan parallèle au plan sécant mené par le sommet.

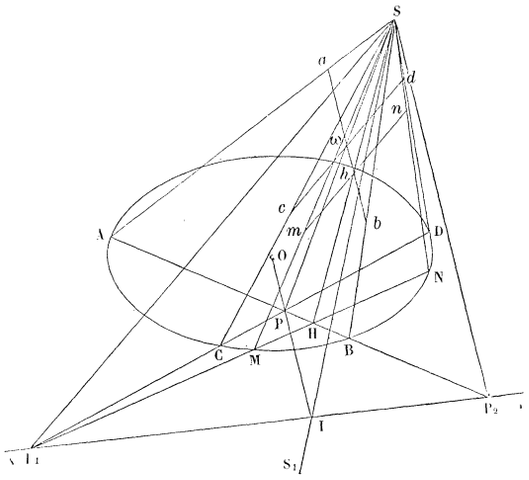
III. *La section elliptique n'admet que des diamètres rectilignes; ces diamètres passent tous par le centre; ils sont conjugués deux à deux, c'est-à-dire se distribuent par couples, tels que l'un de ces diamètres divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre.*

Soient S le sommet d'un cône et O le cercle directeur (*fig.* 2); proposons-nous de trouver les diamètres d'une section elliptique. Pour cela menons, par le sommet S, un plan parallèle à celui de la section, coupant le plan de la directrice suivant la droite XY qui ne rencontre pas le cercle; menons aussi la droite SP_1 dans la direction des cordes que le diamètre doit diviser en deux parties égales, et qui rencontre XY en P_1. Si nous faisons tourner un plan variable autour de SP_1, il coupera le plan de la section suivant une parallèle à SP_1 dans toutes ses positions. Traçons la polaire AB du point P_1, par rapport au cercle O, et supposons que le

Hosted by Google

plan variable, dans une de ses positions, coupe le plan de la base suivant MN; il coupera le cône suivant les génératrices SM, SN, et le plan SAB suivant SH, formant avec SP_1 le faisceau harmonique $S.MNHP_1$. Le

Fig. 2.



même plan coupera le plan de la section suivant la droite *mn* parallèle à SP_1 et divisée en deux parties égales au point *h* par le rayon conjugué SH. Du reste, le point *h* appartient à la fois au plan de la section, au plan SAB, qui sont fixes, et au plan variable SP_1MN; donc le lieu de ce point, qui est le diamètre relatif aux cordes parallèles à SP_1, est la droite d'intersection du plan de la section et du plan SAB qui sont fixes, soit la droite *ab*.

Puisque le pôle P_1 de la droite AB est situé sur XY, la polaire AB de ce point doit passer par le pôle P de XY, et si l'on considère le plan variable dans la position SP_1P, on peut en conclure que le diamètre *ab*, divisant

Hosted by Google

en parties égales les cordes parallèles à SP_1, passe par le centre ω de la section.

Prolongeons AB, polaire du point P_1, jusqu'à sa rencontre avec XY en P_2, la droite P_1CPD, passant par les pôles P_1 et P des droites AB et XY, sera la polaire de leur point commun P_2; il en résulte que le faisceau $S.ABPP_2$ est harmonique; le diamètre *ab* et la droite SP_2 sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième, et le diamètre *ab* qui divise en parties égales les cordes parallèles à SP_1 passe au centre et est divisé par ce point en deux parties égales.

En cherchant le diamètre qui divise en parties égales les cordes parallèles à SP_2, comme nous l'avons fait pour celui qui divise en parties égales les cordes parallèles à SP_1, nous trouvons la droite *cd* parallèle à SP_1; les diamètres de la section elliptique se partagent donc en couples, tels que chaque diamètre d'un couple divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre : ils sont *conjugués* deux à deux.

IV. *Propriété des diamètres conjugués de la section elliptique.* — Si nous considérons le triangle PP_1P_2 de la *fig.* 2, nous pouvons remarquer que chacun de ses sommets est le pôle du côté opposé par rapport au cercle directeur du cône; on peut, d'après cela, lui donner la dénomination de *triangle autopolaire*.

De plus, comme la polaire d'un point par rapport à un cercle est perpendiculaire au diamètre qui passe par le pôle, il en résulte que les droites OP, OP_1, OP_2, sont respectivement perpendiculaires à P_1P_2, PP_2, PP_1, et qu'en conséquence le point O, centre du cercle directeur, est le point de concours des hauteurs du triangle PP_1P_2.

Les points P et P_1 conjugués harmoniques par rapport

Hosted by Google

à C et D sont situés d'un même côté du point milieu de la corde CD, d'où résulte que l'angle P_2PP_1 est obtus, et que la droite OP, perpendiculaire sur P_1P_2, rencontre cette droite au point I entre P_1 et P_2.

Les deux triangles P_1IO, PIP_2, dont nous n'avons pas tracé le côté OP_1, pour ne pas compliquer la figure, sont semblables; car ils sont rectangles en I et leurs angles IOP_1, IP_2P sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires; d'où l'on conclut :

$$\frac{IP_1}{IP} = \frac{IO}{IP_2}$$

ou

$$\begin{aligned} IP_1 \times IP_2 = IP \times IO &= (IO - OP) \times IO \\ &= \overline{IO}^2 - OP \times IO = \overline{IO}^2 - R^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que : *les parallèles à deux diamètres conjugués d'une section elliptique, menées par le sommet du cône, déterminent, sur l'intersection de leur plan avec celui de la directrice circulaire, deux points* P_1, P_2, *situés de part et d'autre de la projection* I *du centre du cercle sur la même droite, et tels que le produit de leurs distances au point* I *soit constant, et égal à la puissance du point* I *par rapport au cercle directeur, au signe près.*

Si l'un des points P_1, P_2 s'éloigne à l'infini, l'autre vient coïncider avec le point I, de sorte que le diamètre conjugué de celui qui est parallèle à XY a la direction de SI.

Remarque. — Si l'on considère le point P comme un centre d'homothétie, le système de deux diamètres conjugués d'une section elliptique a pour homologue le système de leurs parallèles menées par le sommet du

Hosted by Google

cône, le rapport d'homothétie étant $\frac{P\omega}{PS}$ (*fig.* 2); la droite homologue de XY est la trace du plan de la section elliptique sur celui de la directrice circulaire, et il en résulte que deux diamètres conjugués de la section interceptent sur cette dernière droite, à partir de la projection sur elle du centre O, et de part et d'autre, deux segments qui ont avec IP_1, IP_2, le rapport constant $\frac{P\omega}{PS}$; d'où il suit que le produit de ces segments est aussi constant, puisqu'il est égal à $IP_1 \times IP_2 \times \left(\frac{P\omega}{PS}\right)^2$

V. *Axes de la section elliptique. — Second système de sections circulaires.* — On déduit facilement du numéro précédent la construction des axes de la section elliptique. Observons d'abord que, dans cette section, chaque diamètre ayant un diamètre associé qui lui est conjugué, à chaque axe correspondra un second axe perpendiculaire au premier et qui formera avec lui un système de diamètres conjugués rectangulaires. Dès lors, et d'après le numéro précédent, pour trouver les parallèles aux axes menées par le sommet S du cône, (*fig.* 2), il suffira de mener par ce point, et dans le plan SXY, un système de deux droites rectangulaires interceptant sur XY à partir du point I, et de part et d'autre, deux segments dont le produit soit égal à la puissance du point I par rapport au cercle O, au signe près. D'après cela, si nous prolongeons SI d'une longueur IS_1, telle que le produit $IS \times IS_1$ soit égal à $\overline{OI}^2 - R^2$, les deux points S, S_1, et ceux où un système de parallèles à deux axes conjugués menées par le point S coupent XY, sont situés sur un même cercle dont le centre se trouve sur XY, à sa rencontre avec la perpendiculaire élevée au milieu de SS_1.

Hosted by Google

De là sa construction : *Au milieu de* SS_1 *et dans le plan* SXY *on élève une perpendiculaire dont on prend le point commun avec* XY, *de ce point comme centre on décrit un cercle passant par* S *et* S_1, *les points où la circonférence de ce cercle rencontre* XY *étant unis au point* S *par des lignes droites, ces droites donneront les directions d'un système d'axes conjugués.*

Le problème admet toujours une solution, il en admet généralement une seule, d'où résulte que la section elliptique admet un et un seul système de deux axes conjugués qui peuvent être construits. Un seul cas d'indétermination peut se présenter : celui où SS_1 serait perpendiculaire à XY et divisé par cette ligne en I en deux parties égales ; dans ce cas tous les systèmes de diamètres conjugués de la section seraient rectangulaires. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que le plan SOI fût perpendiculaire à XY, en conséquence au plan du cercle directeur et au plan de la section, ou encore que le plan de la section fût perpendiculaire au plan projetant orthogonalement SO sur le plan de la directrice circulaire; en second lieu qu'on eût l'égalité

$$IS \times IS_1 = \overline{IS}^2 = \overline{IO}^2 - R^2,$$

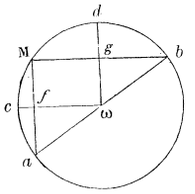
ce qui exigerait que la droite IS fût antiparallèle du diamètre IO par rapport aux génératrices du cône passant par les extrémités de ce diamètre.

On peut voir que dans ce cas la section est circulaire ; en effet, considérons cette courbe dans son plan (*fig.* 3) : soit ω son centre. Traçons le diamètre fixe $a\omega b$, et unissons les extrémités a, b à un point quelconque M de la courbe; construisons encore les deux diamètres ωfc, ωgd, qui divisent Ma, Mb en parties égales ; ωc,

Hosted by Google

ωd sont respectivement parallèles à Mb et Ma, puisque dans le triangle aMb ces droites unissent les milieux de deux côtés.

Fig. 3.



Les deux diamètres ωc, ωd sont conjugués, puisque chacun d'eux divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre; de plus ils sont rectangulaires d'après les hypothèses faites; en conséquence, les droites Mb, Ma, qui leur sont respectivement parallèles, sont rectangulaires, et la courbe lieu des sommets des angles droits dont les côtés passent par deux points fixes, a, b, est une circonférence de cercle.

Cette section et les sections parallèles constituent un nouveau système de sections circulaires du cône.

En dehors de ces sections et de celles qui sont parallèles au cercle directeur, il ne peut se trouver d'autres sections circulaires, car ce sont les seules parmi les sections elliptiques, et les autres, étant illimitées, ne peuvent être circulaires.

VI. *Construction de deux diamètres conjugués de la section elliptique faisant entre eux un angle donné.* — Si nous nous reportons à la *fig.* 2, et d'après la propriété des diamètres conjugués établie au n° IV, Chap. I, nous voyons que, pour construire les parallèles à deux diamètres conjugués faisant un angle donné menées par le sommet, il suffira, après avoir prolongé SI de IS$_1$ sa-

Hosted by Google

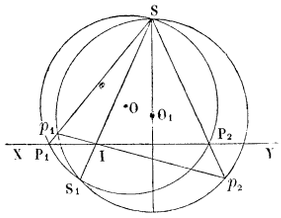
tisfaisant à l'égalité

$$IS \times IS_1 = \overline{OI}^2 - R^2,$$

de faire passer par S et S_1 un cercle tel que le segment passant par le point S et intercepté par XY soit capable de l'angle donné, et d'unir au point S ses points communs avec XY.

Ce cercle peut encore être déterminé par les conditions de passer aux points S et S_1 et de couper XY sous l'angle donné. Pour résoudre simplement la question,

Fig. 4.



transformons la figure par rayons vecteurs réciproques dans le plan SXY, en prenant S pour pôle et pour puissance le produit $SI \times SS_1$.

Supposant le problème résolu, soit O le cercle cherché, passant par S et S_1, et coupant XY, sous l'angle donné, en P_1 et P_2 (*fig.* 4). La figure inverse de XY sera un cercle O_1 passant par le pôle de transformation S, et par le point S_1 transformé de I, ayant du reste pour diamètre SO_1 perpendiculaire à XY; ce cercle O_1 peut être ainsi facilement construit. La figure inverse du cercle O sera une droite $p_1 p_2$ passant en I point transformé de S_1, et coupant le cercle O_1 sous l'angle donné; cette dernière donnée définit la longueur de la corde $p_1 p_2$ et en conséquence sa distance au centre O_1.

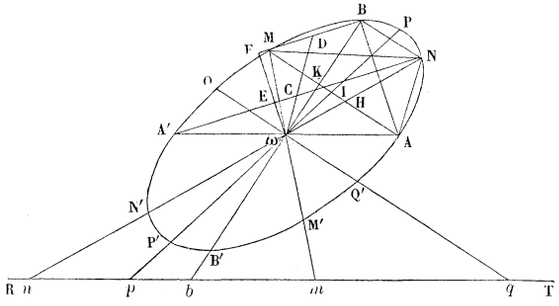
On voit ainsi que le problème admet, généralement,

Hosted by Google

deux solutions, définies par deux positions de $p_1 p_2$ symétriques par rapport à IO_1; les rayons cherchés sont les droites Sp_1, Sp_2. On voit toutefois que, le point I étant intérieur au cercle O_1 la corde $p_1 p_2$ ne peut couper ce cercle sous un angle quelconque; l'angle sous lequel se coupent deux diamètres conjugués de la section elliptique a un minimum (aigu), correspondant au minimum de la corde $p_1 p_2$, minimum perpendiculaire à IO_1.

VII. Lemme. — Soit ω une section elliptique, RT la trace de son plan sur celui de la directrice circulaire du cône auquel elle appartient, AA′ le diamètre parallèle à RT, BB′ son conjugué rencontrant RT au point b (*fig.* 5); il résulte de ce que nous avons vu au n° IV,

Fig. 5.



Chap. I, Rem., que deux diamètres conjugués de la courbe interceptent sur RT, à partir du point b, et de part et d'autre, deux segments dont le produit est constant. D'après cela, nous nous proposons de montrer que :

Si par deux des extrémités des diamètres AA′, BB′, *nous menons deux cordes parallèles* AM, BN, *de direction quelconque, les secondes extrémités* M, N *de ces cordes sont aussi celles de deux diamètres conjugués.*

Hosted by Google

Pour cela, construisons les diamètres MM′, NN′, et prolongeons-les jusqu'à leurs rencontres avec RT en m et n; construisons aussi le diamètre QQ′ parallèle à AM et son conjugué PP′ qui divise AM et BN en parties égales, et prolongeons ces diamètres jusqu'à leurs rencontres avec RT en q et p.

Le faisceau des quatre droites ωP, ωQ, ωA, ωM est harmonique, puisque la parallèle MA au rayon ωQ est divisée par les trois autres en deux parties égales; il en résulte que la parallèle RT au rayon ωA est divisée par les trois autres en deux parties égales; on a donc $mp = mq$, ou, reportant les distances à l'origine b,

$$bp + bm = bq - bm,$$

ou par transposition

$$2bm = bq - bp.$$

Le faisceau formé par les quatre droites ωP, ωQ, ωN, ωB est aussi harmonique, BN parallèle à ωQ étant divisée par les trois autres en deux parties égales; ce faisceau est coupé par RT aux quatre points p, q, b, n, tels que les deux derniers soient conjugués harmoniques des deux premiers, d'où l'on déduit, reportant l'origine des distances au point b,

$$\frac{bp}{bq} = \frac{bn - bp}{bn + bq},$$

ou faisant le produit des extrêmes égal à celui des moyens, transposant et tenant compte de l'égalité précédente,

$$2bp \times bq = bn \times (bq - bp) = 2bm \times bn.$$

$bp \times bq$ est le produit des segments interceptés sur RT à partir du point b par les diamètres conjugués ωP,

Hosted by Google

ωQ; le produit des segments bm, bn, interceptés de la même manière par les diamètres ωM, ωN, lui étant égal, on doit en conclure que ces diamètres ωM, ωN, sont conjugués, ce qui démontre le lemme énoncé, que nous généraliserons du reste dans le Chapitre suivant.

Premières propriétés métriques des diamètres de l'ellipse. Théorèmes d'Apollonius.

VIII. Considérons toujours la *fig.* 5 : les cordes AM, BN étant parallèles et le diamètre ωP les divisant en parties égales, divise aussi le segment HK de AM en deux parties égales, de sorte que le point I est le milieu commun de AM et de HK ; on en conclut $KM = HA$, et $HM = KA$.

De là l'équivalence des triangles $K\omega A$, $H\omega M$, qui ont un sommet commun en ω et leurs bases égales KA, HM, situés sur la même ligne droite ; d'où

$$K\omega A = H\omega M.$$

De même les triangles KAB, HNM sont équivalents, comme ayant les bases KA, HM égales et en ligne droite, et mêmes hauteurs puisque leurs sommets B, N, sont sur une parallèle à la base ; d'où

$$KAB = HMN.$$

Ajoutant membre à membre les deux égalités précédentes,

$$\omega AB = M\omega N,$$

c'est-à-dire que le triangle ayant pour côtés deux demi-diamètres conjugués quelconques a une valeur constante égale à celle du triangle ωAB, d'où l'on peut déduire le premier des Théorèmes d'Apollonius, qui s'énonce

Hosted by Google

ainsi : *Le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués quelconques d'une ellipse est équivalent au rectangle construit sur les deux demi-axes.* On voit, pour les mêmes motifs, les équivalences de triangles

$$\omega KM = \omega HA, \qquad MKB = HNA,$$

et ajoutant membre à membre

$$\omega MB = \omega NA;$$

du reste ωNA est évidemment équivalent à $\omega NA'$, car ces triangles ont des bases égales et même hauteur; on en déduit

$$\omega MB = \omega NA'.$$

Il résulte du lemme établi au numéro précédent que les cordes BM, NA′ sont parallèles; car, si par A′ on mène une parallèle à BM, elle doit passer par l'extrémité du diamètre conjugué à ωM, c'est-à-dire par le point N. (Voir *la note à la fin du présent numéro.*)

Les cordes BM, NA′ étant parallèles, leurs points milieux D, C sont sur un même diamètre ωCD qui sert de médianes aux triangles équivalents ωMB, $\omega NA'$. Si du point ω nous abaissons la perpendiculaire commune ωEF aux cordes parallèles NA′, BM, on a, d'après un théorème connu, dans chacun des triangles ONA′, ωBM,

$$\overline{\omega N}^2 - \overline{\omega A'}^2 = 2NA' \times EC,$$

$$\overline{\omega B}^2 - \overline{\omega M}^2 = 2BM \times FD,$$

mais les triangles rectangles ωEC, ωFD sont semblables, et l'on en déduit

$$\frac{FD}{EC} = \frac{F\omega}{E\omega}.$$

Hosted by Google

Multipliant les deux membres par $\frac{BM}{NA'}$, nous avons

$$\frac{BM \times FD}{NA' \times EC} = \frac{BM \times F\omega}{NA' \times E\omega} = \frac{2\omega BM}{2\omega A'N} = 1;$$

d'où $NA' \times EC = BM \times FD$, et introduisant cette égalité dans les deux précédentes,

$$\overline{\omega N}^2 - \overline{\omega A'}^2 = \overline{\omega B}^2 - \overline{\omega M}^2,$$

par transposition et observant que $\omega A' = \omega A$, on a

$$\overline{\omega M}^2 + \overline{\omega N}^2 = \overline{\omega A}^2 + \overline{\omega B}^2,$$

c'est-à-dire que *la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques d'une section elliptique est constante, et, en conséquence, égale à la somme des carrés des demi-axes,* ce qui est l'énoncé du second des Théorèmes d'Apollonius.

Note. — Nous avons admis que la parallèle à BM menée par le point A′ passait en N; en effet, si elle n'y passait pas, elle passerait par N′, d'après le lemme cité; mais, comme A′N′ est parallèle à AN, il faudrait que AN fût parallèle à BM; dès lors la figure AMBN serait un parallélogramme, dont les diagonales AB, MN devraient passer par le centre; il faudrait donc que B coïncidât avec A′, ce qui est impossible.

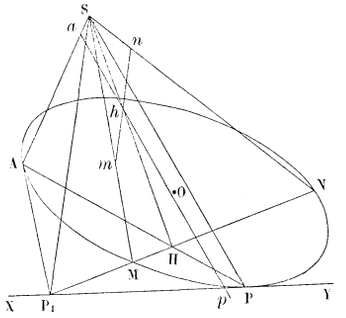
Du centre et des diamètres dans la parabole.

IX. *Le centre de la section parabolique passe à l'infini.* — Supposons qu'un plan, passant par le sommet S d'un cône dont la directrice est le cercle O (*fig.* 6), coupe d'abord le plan de la directrice circulaire suivant une droite XY qui ne rencontre pas cette courbe : un plan parallèle coupera le cône suivant une section elliptique dont le centre sera à l'intersection du plan sécant

Hosted by Google

et de la droite unissant la somme S au pôle P de XY (Chap. I, n° II); si nous admettons actuellement que la droite XY se déplace d'une manière continue en se rapprochant du centre et jusqu'à devenir tangente au cercle directeur, son pôle P viendra se placer au point de contact, la droite SP viendra coïncider avec la géné-

Fig. 6.



ratrice de contact du cône et du plan tangent SXY, et, si le plan sécant reste constamment parallèle au plan SXY à l'instant précis où XY deviendra tangente au cercle O, SP deviendra parallèle au plan sécant, et l'intersection de cette droite avec le plan passera à l'infini dans la direction de SP; comme, au même instant, la section deviendra parabolique, on doit considérer le centre de cette section comme situé à l'infini.

X. *Tous les diamètres de la parabole sont rectilignes et parallèles.* — Considérons toujours la *fig.* 6, construisons la droite SP_1 parallèle aux cordes du milieu desquelles nous cherchons le lieu. La droite SP_1, parallèle au plan sécant, est située dans le plan SXY : construisons la polaire AP du point P_1, le point P_1 étant situé sur XY, la polaire AP passera par le pôle P de XY. Par la droite SP_1 faisons passer un plan variable :

Hosted by Google

dans toutes ses positions il coupera le plan sécant suivant une parallèle à SP_1. Soient SMN une de ses positions, SM, SN les génératrices suivant lesquelles il coupe le cône et SH son intersection avec le plan SAP, les quatre droites SM, SN, SP_1, SH forment un faisceau harmonique; la droite *mn*, intersection de ce plan SMN et du plan sécant, et dont les extrémités *m*, *n* appartiennent à la section, est divisée en deux parties égales par le point *h* où elle est rencontrée par le rayon SH conjugué de SP_1, puisqu'elle est parallèle à ce dernier rayon. Le point *h* dont nous cherchons le lieu est situé à la fois dans le plan sécant et dans le plan fixe SAP, le diamètre cherché est dans la droite *ap*, intersection du plan sécant et du plan SAP; *ap* est parallèle à SP comme intersection de deux plans parallèles par un troisième : donc dans la parabole tous les diamètres sont des droites parallèles.

XI. *Propriétés des diamètres de la parabole.* — Les diamètres de la parabole ne coupent cette courbe qu'en un point situé à distance finie; en effet, on peut obtenir tous les diamètres de la parabole en coupant son plan par un plan variable tournant autour de SP (*fig.* 6); or chacun de ces plans coupe le cône suivant la génératrice SP, parallèle au diamètre correspondant, et suivant une seconde génératrice non parallèle; le diamètre rencontrera la seconde seule de ces génératrices à distance finie, et la première à l'infini; il n'aura donc avec la parabole qu'un seul point commun à distance finie.

L'angle sous lequel un diamètre d'une parabole coupe les cordes correspondantes est égal à l'angle PSP_1 de la *fig.* 6; cet angle peut passer par tous les états de grandeur.

Hosted by Google

Il peut passer une seule fois par l'état égal à un angle droit si l'on prend SP_1 perpendiculaire à SP; il en résulte que la section parabolique admet un et un seul axe, et un seul sommet qu'on peut déterminer d'après ce qui précède.

On peut encore, d'après ce qui précède, construire les diamètres de la parabole coupant les cordes correspondantes sous un angle donné; le problème est toujours possible et le nombre des solutions est deux. Dans le cas particulier de l'angle nul, SP_1 vient se réunir avec SP; il en est de même de SA : le plan SPA devient tangent suivant SP, se confond avec SXY, et le diamètre correspondant passe à l'infini, car le plan SXY est parallèle au plan de la courbe.

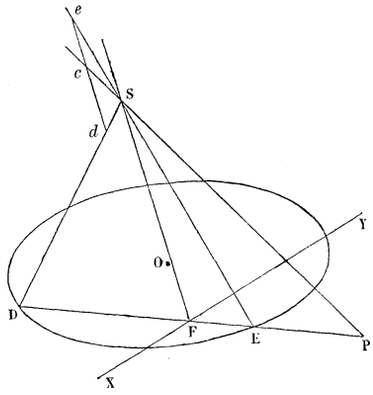
Du centre et des diamètres dans l'hyperbole; premières propriétés de direction.

XII. *La section hyperbolique a un centre.* — Soit S le sommet d'un cône dont O est le cercle directeur (*fig.* 7) : considérons une section hyperbolique, le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet coupera le plan de la base suivant une droite XY rencontrant la directrice en deux points réels. Soit P le pôle de XY par rapport au cercle directeur, il lui sera extérieur; unissons le pôle P au sommet S par une droite rencontrant le plan de la section en *c*, et faisons passer par cette droite un plan variable dans des limites telles qu'il rencontre le cercle O en deux points D, E, et la polaire XY de P en F. Construisons les génératrices SD, SE, intersection du cône et du plan auxiliaire, et aussi la droite SF : le plan auxiliaire coupera le plan de la section, qui est parallèle au plan SXY, suivant une droite *de* parallèle à SF et passant par le point *c*; les

Hosted by Google

points d, e, appartiendront à la section, puisqu'ils sont situés à l'intersection d'une droite du plan sécant et de deux génératrices du cône. Mais le faisceau S.DEFP est harmonique, dès lors la droite dce, parallèle au rayon

Fig. 7.



SF, est divisée par le point c en deux parties égales; on en conclut, par les motifs donnés à l'occasion de la section elliptique (Ch. I, n° II), que le point c est un centre de la section hyperbolique.

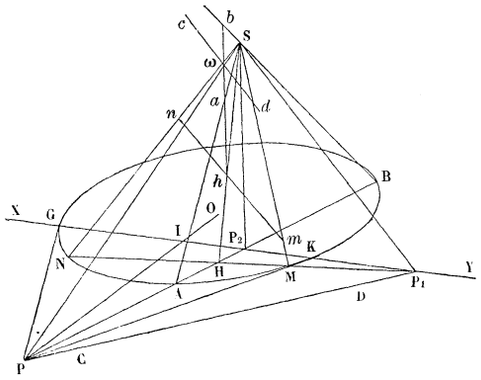
XIII. *La section hyperbolique n'admet que des diamètres rectilignes; ces diamètres passent tous par le centre; ils sont conjugués deux à deux. Sur deux diamètres conjugués de l'hyperbole l'un rencontre la courbe et l'autre ne la rencontre pas.* — Soit S le sommet d'un cône dont le cercle directeur est O (*fig.* 8) : proposons-nous de trouver les diamètres d'une section hyperbolique; pour cela menons par le sommet du cône un plan parallèle à celui de la section, il coupera le plan du cercle directeur suivant la droite XY rencontrant la circonférence en G et K. Menons encore par le

Hosted by Google

sommet S une parallèle à la direction des cordes dont le milieu décrit le diamètre que nous cherchons; cette parallèle coupera XY en un point P_1 ou P_2, qui peut être extérieur ou intérieur au cercle; considérons d'abord le point extérieur P_1.

Construisons la polaire AB du point P_1, et faisons tourner un plan variable autour de SP_1; considérons-le dans la position où il coupe le plan du cercle directeur suivant MN, il coupe le cône suivant les génératrices SM, SN, et le plan SAB suivant SH formant avec SP_1

Fig. 8.



le faisceau harmonique $S.NMHP_1$. Il coupe, en outre, le plan de la section suivant la droite *mn*, corde de l'hyperbole parallèle à SP_1 et dont le milieu *h* est déterminé par son intersection avec SH, rayon conjugué de SP_1. Le point *h*, qui décrit le diamètre cherché, se trouve à la fois dans le plan SAB et dans le plan de la section, qui sont fixes : donc ce diamètre est une ligne droite.

Si la trace du plan variable sur le plan du cercle directeur tourne autour de P_1 depuis la position P_1A, où elle est tangente à ce cercle, jusqu'à la position P_1X,

Hosted by Google

les extrémités de la corde *mn* restent sur la nappe inférieure du cône, et la corde se déplace parallèlement à elle-même depuis la position où elle est tangente en *a* jusqu'à l'infini; et, si cette trace tourne depuis la position P_1B jusqu'à P_1X, les extrémités de la corde *mn* restent sur la nappe supérieure, et la corde *mn* se déplace parallèlement à elle-même depuis la position où elle est tangente en *b* jusqu'à l'infini; les autres positions du plan variable, et en particulier la position SP_1P, passant par le pôle P de la droite XY, coupent le plan de la section suivant des droites parallèles à *mn* situées entre les deux branches de la courbe et ne la rencontrant pas.

Le point P_1, pôle de la droite AB, étant situé sur XY, la droite AB passe par le pôle P de XY; et P_2 étant l'intersection des droites AB et XY sera le pôle de la droite P_1P qui unit les pôles de ces droites.

La droite SP_2 et le diamètre *ab*, dont nous venons d'établir l'existence, sont parallèles, comme intersections du plan de la section et du plan SXY, qui sont parallèles, par le plan SAB; et, comme le faisceau $S.ABPP_2$ est harmonique, *ab*, parallèle à SP_2, est divisée en deux parties égales par le rayon SP, au point ω qui est le centre de la section.

On verrait de même, en faisant tourner un plan variable autour de SP_2, que les cordes de l'hyperbole qui lui sont parallèles sont divisées par *cd* en deux parties égales; dès lors *cd* est le diamètre divisant en parties égales les cordes parallèles à SP_2 qui toutes coupent la courbe en deux points situés un sur chaque branche; *ab* et *cd* sont donc deux diamètres conjugués dont l'un rencontre la courbe pendant que l'autre ne la rencontre pas.

Hosted by Google

XIV. *Propriétés des diamètres conjugués de l'hyperbole. Asymptotes.* — Comme nous l'avons vu pour l'ellipse, n° IV, Chap. I, le triangle PP_1P_2 de la *fig.* 8 est tel que chacun de ses sommets est le pôle du côté opposé; on peut donc aussi lui conserver la qualification d'*autopolaire*.

Les points P_1 et P_2 étant conjugués harmoniques par rapport à G et K sont situés d'un même côté du milieu I de GK, et l'on a la relation $IP_1 \times IP_2 = \overline{IK}^2 = R^2 - \overline{OI}^2$, plus immédiate que dans le cas de la section elliptique.

On peut, comme dans le cas de l'ellipse, s'en servir pour déterminer les axes et les sommets, et aussi deux diamètres conjugués faisant un angle donné, observant que dans le cas actuel : 1° le système des deux axes est toujours déterminé; 2° le minimum de l'angle aigu de deux diamètres conjugués est zéro, car les directions des deux diamètres conjugués menées par le sommet, soit SP_1 et SP_2, peuvent coïncider suivant SK ou SG.

Les mêmes questions peuvent être résolues plus simplement en se fondant sur la remarque importante qui suit.

Remarque. — Les tangentes au cercle O en G et K (*fig.* 8) vont se couper au pôle P de la droite GK, puisque la droite GK passe par les pôles G et K des tangentes. Les plans SPG, SPK sont tangents au cône suivant les génératrices SG, SK qui rencontrent le plan de la section à l'infini. Ces plans tangents coupent le plan de la section suivant les parallèles à SG et SK menées par le centre ω, et tangentes à l'hyperbole aux points situés à l'infini; ces droites prennent le nom d'*asymptotes*. Les deux diamètres conjugués *ab*, *cd*, et les deux asymptotes, étant respectivement parallèles aux rayons du faisceau harmonique $S.GKP_2P_1$, sont quatre droites

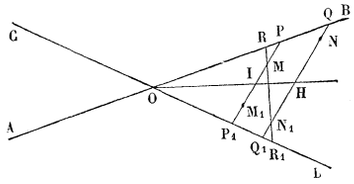
Hosted by Google

formant elles-mêmes un faisceau harmonique, et l'on peut en conclure que *ab* et *cd*, diamètres conjugués de l'hyperbole, forment aussi un système de diamètres conjugués du système des asymptotes. Dès lors, pour résoudre les questions, précédant la présente remarque, pour l'hyperbole, il suffit de les résoudre pour le système des asymptotes, et elles n'offrent alors aucune difficulté.

Propriétés des sécantes à l'hyperbole et au système de ses asymptotes; construction de la courbe par points; intersection d'une droite et d'une hyperbole.

XV. Soient AB, CD les asymptotes d'une hyperbole qui se coupent en son centre O (*fig.* 9), une sécante PP_1 rencontrant les asymptotes aux points P et P_1, et la

Fig. 9.



courbe aux points M et M_1, OI le diamètre divisant MM_1 et les cordes parallèles en deux parties égales; il résulte de la remarque du numéro précédent que OI divise aussi PP_1 en deux parties égales; d'où

$$IP = IP_1,$$
$$IM = IM_1,$$

et, retranchant membre à membre, $PM = PM_1$.

C'est-à-dire que *les segments d'une sécante compris entre ses points communs avec la courbe et avec les asymptotes sont égaux.*

Hosted by Google

La démonstration s'applique évidemment si les points M et M_1 appartiennent à deux branches différentes.

Corollaire. — Si la sécante tourne autour du point M jusqu'à ce que le point M_1 vienne se réunir avec lui, à cet instant elle devient tangente à la courbe en M, et, comme l'égalité $PM = P_1M_1$ a constamment lieu, il en résulte que : *le point de contact d'une tangente à une hyperbole, limitée aux asymptotes, divise cette droite en deux segments égaux.*

Considérons actuellement une seconde sécante QQ_1 parallèle à la première : soient N et N_1 ses points communs avec la courbe; unissons MN_1 par une ligne droite rencontrant les asymptotes en R et R_1 ; d'après ce qui précède, nous aurons les égalités

$$PM = P_1M_1, \qquad PM_1 = P_1M;$$
$$RM = R_1N_1, \qquad RN_1 = R_1M;$$
$$QN = Q_1N_1, \qquad QN_1 = Q_1N.$$

Les deux triangles PRM, QRN_1 sont semblables, et l'on en déduit

$$\frac{PM}{QN_1} = \frac{RM}{RN_1};$$

de la similitude des triangles $R_1N_1Q_1$, R_1MP_1, on tire aussi

$$\frac{Q_1N_1}{MP_1} = \frac{R_1N_1}{R_1M};$$

mais, d'après les égalités précédentes, les seconds membres des deux dernières égalités sont identiques; les deux premiers membres sont donc égaux, d'où

$$\frac{PM}{QN_1} = \frac{Q_1N_1}{MP_1},$$

Hosted by Google

ou, en tenant compte des égalités précédentes,

$$\frac{PM}{Q_1N} = \frac{QN}{MP_1}, \qquad \text{et} \qquad MP \times MP_1 = NQ \times NQ_1.$$

C'est-à-dire que *le produit des segments d'une droite compris entre un point de la courbe et les asymptotes reste invariable quand la droite se déplace parallèlement à une direction fixe.*

Corollaire. — Ce produit des deux segments d'une sécante est égal au carré du segment de tangente parallèle, et compris entre le point de contact et une asymptote.

On peut déduire de la première de ces propriétés un moyen de construire la courbe par points, quand on connaît ses asymptotes et un point.

Considérons, en effet, les asymptotes AB, CD d'une hyperbole, et un point M de la courbe (*fig.* 9), en menant par le point M la sécante RMR_1 et prenant à partir de R_1 le segment $R_1N_1 = RM$, nous aurons, en N_1, le second point commun de la sécante et de la courbe, et nous pourrons en construire ainsi autant que nous voudrons.

D'après la seconde de ces propriétés, on peut construire, au moyen des mêmes données, les points communs d'une hyperbole et d'une droite quelconque.

Soient à trouver les points communs de l'hyperbole dont on connaît les asymptotes AB, CD, et le point M, (*fig.* 9), avec la droite QQ_1 ; menons par le point M la parallèle PP_1 à QQ_1, il suffira de partager QQ_1 en deux parties QN, NQ_1 ou QN_1, N_1Q_1, telles qu'on ait les égalités

$$QN \times NQ_1 = PM \times MP_1 = QN_1 \times N_1Q_1,$$

ce qui revient à construire un rectangle équivalent à un

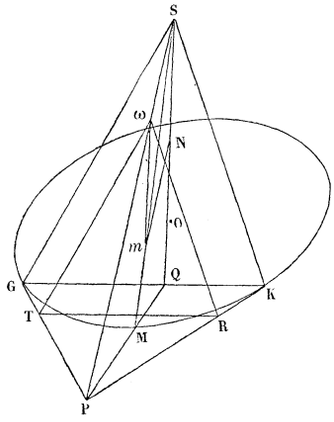
Hosted by Google

rectangle donné, connaissant la somme des côtés, problème dont la solution est anciennement connue.

XVI. *Deux droites qui se coupent, considérées comme asymptotes, et un point, définissent une hyperbole.* — Il s'agit de démontrer que, étant données deux droites qui se coupent et un point, on peut construire une hyperbole ayant ces deux droites pour asymptotes et passant par le point.

Pour cela, prenons un cône dont le sommet soit S et le cercle directeur O, et tel qu'il existe sur sa surface

Fig. 10.



deux génératrices SG, SK, faisant un angle égal à celui des droites données, qui comprend le point donné, (*fig.* 10).

La figure composée des deux droites données et du point donné pourra s'appliquer sur GSK, soit N la position que prendra le point donné après cette superposition. Déterminons le pôle P de la droite GK, menons la droite SP et faisons passer un plan par SP et le point N; ce plan coupera le cône suivant la génératrice SM;

Hosted by Google

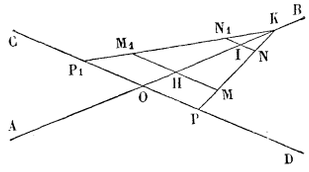
menons par le point N la parallèle Nm à SP, et par le point m, où cette droite rencontre SM, la droite $m\omega$ parallèle à SN; enfin par le point ω un plan parallèle à GSK, qui coupera les plans SPG, SPK, suivant les droites ωT, ωR.

La figure formée par les trois droites ωT, ωR, ωm est superposable sur celle qui est composée de SG, SK, SN, car ces droites sont parallèles deux à deux comme intersections de deux plans parallèles par un troisième, et de plus $\omega m = \mathrm{SN}$, comme côtés opposés d'un parallélogramme. Il en résulte que les deux droites et le point donnés peuvent s'appliquer simultanément sur ωT, ωR et m, et, comme le plan TωR coupe le cône suivant une hyperbole ayant pour asymptotes ωT, ωR et passant par le point m, le théorème se trouve démontré.

Premières propriétés métriques des diamètres de l'hyperbole.

XVII. *Définition de l'hyperbole conjuguée d'une hyperbole donnée.* — Si l'on considère une hyperbole ayant pour asymptotes AB, CD, et passant par le point M (*fig.* 11), que par chacun de ses points on mène des parallèles à une des asymptotes, CD par exemple,

Fig. 11.



et qu'on les prolonge d'une longueur égale au delà de leur point de rencontre avec l'autre asymptote, de sorte

que $HM_1 = HM$, $IN_1 = IN$, ..., les points M_1, N_1 ainsi obtenus décrivent une autre hyperbole ayant les mêmes asymptotes et qui est dite conjuguée de la première.

Il suffit, pour justifier cette définition, d'établir que le lieu des points M_1, N_1, ... est une nouvelle hyperbole, ou que, considérant M_1 comme fixe et N_1 comme variable, on a, pour toutes les positions de N sur la première hyperbole, $P_1M_1 = N_1K$, d'après la proposition démontrée au numéro précédent et la construction par points de l'hyperbole établie au n° XV.

Or, les droites MM_1, NN_1 étant parallèles et divisées en parties égales par les points H, I, les droites M_1N_1, MN, vont concourir en un même point K de OB; et les segments P_1M_1, N_1K, proportionnels à PM et NK qui sont égaux (n° XV, Chap. I), sont eux-mêmes égaux.

Il est évident, d'après un théorème connu, que les droites MN, M_1N_1 interceptent sur la deuxième asymptote des segments égaux OP, OP_1; dès lors, si l'on unissait le point O aux milieux respectifs de KP, KP_1, on formerait un parallélogramme dont les côtés issus de O constitueraient un système de diamètres conjugués de chacune des hyperboles conjuguées.

Si l'on supposait que le point N se déplaçât sur l'hyperbole à laquelle il appartient jusqu'à ce qu'il vînt coïncider avec M, en même temps N_1 se réunirait à M_1, les deux droites PM, P_1M_1 deviendraient simultanément tangentes aux deux hyperboles et seraient divisées par les points M et M_1 en deux parties égales.

Dans ces conditions, et par définition, OM et OM_1 sont ce qu'on appelle les *longueurs de deux demi-diamètres conjugués* de l'une ou de l'autre des deux hyperboles conjuguées, observant qu'un seul des deux rencontre chaque courbe.

On peut encore remarquer dans cette figure limite

Hosted by Google

que le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués a une de ses diagonales en coïncidence avec une de ses asymptotes, et la seconde diagonale parallèle avec l'autre asymptote.

Et il en résulte qu'une demi-tangente limitée au point de contact et à une asymptote est égale et parallèle au demi-diamètre qui ne rencontre pas la courbe, et qui est conjugué de celui qui aboutit au point de contact.

Théorèmes d'Apollonius dans l'hyperbole.

XVIII. D'après ce que nous venons de voir au numéro précédent, il est évident que le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués est équivalent au triangle ayant pour base une tangente à l'extrémité de l'un d'eux limitée aux asymptotes, et pour côtés les segments qu'elle intercepte sur les asymptotes; ce triangle est lui-même le double du parallélogramme construit en menant par le milieu de sa base, extrémité du diamètre conjugué de sa direction, des parallèles aux asymptotes.

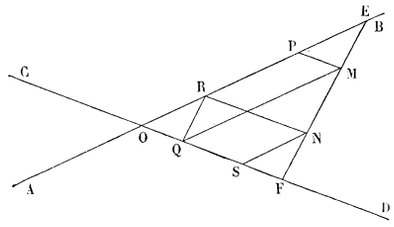
Il est facile de voir que ce dernier parallélogramme a une surface constante, et qu'en conséquence il en est de même de celle du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués, qui est le double de celle du précédent.

En effet, soient M et N les extrémités de deux diamètres d'une hyperbole ayant pour asymptotes AB et CD (*fig.* 12), construisons les deux parallélogrammes MPOQ, NROS, dont les côtés sont parallèles aux asymptotes, je dis qu'ils sont équivalents. Pour le démontrer, joignons MN par une ligne droite rencontrant les asymptotes en E et F, et unissons QR par une ligne droite; les deux triangles ERN, MQF sont égaux, puisqu'ils sont équiangles et ont des bases égales, EN = MF;

Hosted by Google

il en résulte qu'ils ont même hauteur, et que QR est parallèle à EF; dès lors les figures ERQM, NRQF sont des parallélogrammes équivalents comme ayant les bases

Fig. 12.



EM et NF égales, et même hauteur. Or les parallélogrammes ERQM, POQM d'une part, NRQF, NROS d'autre part, sont équivalents deux à deux; donc de l'égalité ERQM = NRQF, on peut déduire

$$POQM = NROS,$$

ce qu'il fallait démontrer.

D'après cela, le parallélogramme construit sur OM et son demi-conjugué, et le parallélogramme construit sur ON et son demi-conjugué, qui sont les doubles des précédents, sont équivalents.

On en conclut que *le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués d'une hyperbole est égal au rectangle construit sur les demi-axes,* ce qui constitue le premier des Théorèmes d'Apollonius.

Soit encore EF une tangente à une hyperbole dont les asymptotes sont AB et CD (*fig.* 13), le point de contact I est placé au milieu de EF; OI et IF sont les longueurs des deux demi-diamètres conjugués.

Menons, par le point I, IM et IN respectivement parallèles à AB et CD; IM sera médiane du triangle, et, si nous tracons IH perpendiculaire à OF, nous aurons,

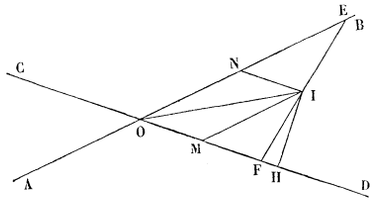
Hosted by Google

d'après un théorème connu,

$$\overline{OI}^2 - \overline{IF}^2 = 4\,OM \times MH.$$

Dans le triangle rectangle IMH, l'angle en M est égal à celui des asymptotes et en conséquence fixe; il en ré-

Fig. 13.



sulte que le rapport des côtés de l'angle droit est constant, soit $\frac{MH}{IH} = \alpha$; nous pouvons dans l'égalité précédente remplacer MH par son égal $\alpha \times IH$, ce qui donne

$$\overline{OI}^2 - \overline{OF}^2 = 4\alpha \times OM \times IH = 4\alpha\,OMIN,$$

OMIN étant le parallélogramme que nous avons démontré être constant dans le théorème précédent.

De là résulte que *la différence des carrés de deux demi-diamètres conjugués de l'hyperbole est constante et égale à la différence des carrés des demi-axes,* ce qui est le second des Théorèmes d'Apollonius.

Pôle et polaire dans les coniques.

XIX. Si par un point ou pôle fixe pris dans le plan d'une conique on mène à la courbe une suite de sécantes, on donne le nom de *polaire de ce point* au lieu du point de chaque sécante conjugué harmonique du pôle par

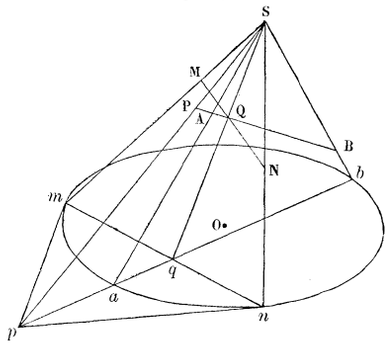
Hosted by Google

rapport à ses points de rencontre avec la courbe. Ce lieu est une droite.

Les propositions connues sur pôles et polaires au cercle sont également vraies pour les coniques.

Soit S le sommet d'un cône dont O est le cercle directeur (*fig.* 14) ; considérons un plan sécant, et soit P un point de ce plan. Joignons S et P par une ligne droite que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre, p, avec le plan du cercle directeur. Par SP faisons passer un plan variable coupant le cône suivant les génératrices SA, SB,

Fig. 14.



et le plan de la section suivant PAB; nous cherchons le lieu du point Q, conjugué harmonique de P, par rapport à A et B. Le faisceau S.PQAB est harmonique, ses rayons prolongés rencontrent le plan de la base circulaire sur la droite pb, intersection du plan variable et de ce plan de base; les traces a et b de SA et SB sont situées sur la circonférence O, et le point q, trace de SQ, est conjugué harmonique de p par rapport à a et b. Il en résulte que q décrit la polaire mn de p par rapport au cercle O, qu'en conséquence Q se déplace dans le plan Smn et décrit l'intersection de ce plan fixe et du plan de la section, qui est la droite fixe MN.

Hosted by Google

La polaire du point P par rapport à la conique est donc une droite, perspective, sur le plan de la conique, de la polaire par rapport au cercle O, de la perspective du point P sur le plan de ce cercle.

Il en résulte immédiatement, en remontant aux propriétés des pôles et polaires par rapport au cercle :

Que si le pôle P d'une droite D, par rapport à une conique, est situé sur une droite D_1, réciproquement le pôle P_1 de la droite D_1 est situé sur la droite D;

Que si une droite D_1 tourne autour d'un point fixe P, son pôle P_1 décrit la polaire D du point P;

Que si le pôle P_1 d'une droite D_1 décrit une droite fixe D, cette droite D_1 tourne autour d'un point fixe P, pôle de la droite D.

Hosted by Google

CHAPITRE II.

De l'involution et de ses usages. Théorèmes et applications.

I. Définitions; deux théorèmes de Géométrie.

Si l'on considère trois points sur une ligne droite, on donne le nom de *puissance* du premier, qui est aussi désigné par un des mots *pôle* ou *centre,* par rapport aux deux autres, au produit des segments interceptés entre le premier et chacun des deux autres; la puissance est considérée comme positive ou négative suivant que les segments sont de mêmes sens ou de sens contraires.

On sait que, si par un point fixe du plan d'un cercle on lui mène une sécante variable, la puissance du point fixe par rapport aux points de rencontre de la sécante et du cercle est un nombre constant, qui a reçu le nom de *puissance* du point par rapport au cercle. Cette *puissance* est représentée en grandeur et en signe par l'excès positif ou négatif du carré de la distance du point au centre sur le carré du rayon; il en résulte que le lieu géométrique des points d'égale puissance par rapport à un cercle est un cercle concentrique.

On sait encore que le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles, situés dans un même plan, est une droite perpendiculaire à la ligne des centres et qui porte le nom d'*axe radical.*

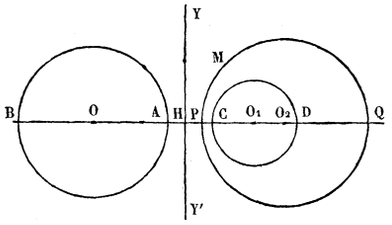
Théorème I. — *Le lieu géométrique des points dont les puissances, par rapport à deux cercles, situés dans le*

Hosted by Google

même plan, sont dans un rapport constant, est un troisième cercle ayant avec eux même axe radical.

Soient O et O_1 les deux cercles donnés, α le rapport caractérisant un point M du lieu (*fig.* 15), YY′ l'axe ra-

Fig. 15.



dical des deux cercles O et O_1, on doit avoir par définition, R et R_1 étant les rayons des cercles O et O_1,

$$\frac{\overline{MO}^2 - R^2}{\overline{MO}_1^2 - R_1^2} = \alpha$$

ou

$$\overline{MO}^2 - \alpha\overline{MO}_1^2 = R^2 - \alpha R_1^2. \tag{1}$$

Or on sait que *le lieu des points dont la somme des produits des carrés des distances à deux points fixes par des coefficients positifs ou négatifs donnés est constante est une circonférence de cercle dont le centre est sur la droite qui unit les deux points, sauf le cas où la somme des coefficients est nulle, cas auquel le lieu est l'axe radical.*

Le lieu est donc un cercle dont le centre est situé sur la droite qui unit les centres des deux premiers, reste à établir qu'il a avec eux même axe radical. La proposition est évidente pour le cas où les cercles se coupent réellement; car l'égalité (1) est visiblement satisfaite si le point M vient se placer en un des points communs des deux cercles. Pour le démontrer dans le cas où ils

Hosted by Google

ne se coupent pas réellement, exprimons que chacun des points P et Q, où le lieu rencontre le diamètre OO_1, satisfait à l'égalité qui les caractérise, nous aurons

$$\frac{PA \times PB}{PC \times PD} = \alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{QA \times QB}{QC \times QD} = \alpha;$$

ou, reportant l'origine au point H, où l'axe radical des deux premiers cercles rencontre la ligne des centres,

$$(PH + HA)(PH + HB) = \alpha(HC - HP)(HD - HP),$$
$$(QH + HA)(QH + HB) = \alpha(QH - HC)(QH - HD).$$

Ordonnons ces deux égalités, lues au premier membre, par rapport aux puissances décroissantes de HP et HQ, respectivement, observant que $HA \times HB = HC \times HD$, que de plus $HA + HB = 2HO$ et $HC + HD = 2HO_1$, on a

$$\overline{HP}^2(1 - \alpha) + 2HP(HO + \alpha HO_1) + HA \times HB(1 - \alpha) = 0,$$
$$\overline{HQ}^2(1 - \alpha) + 2HQ(HO + \alpha HO_1) + HA \times HB(1 - \alpha) = 0;$$

multipliant les deux membres de la première par HQ, les deux membres de la seconde par HP, et retranchant, on trouve

$$(HP \times HQ - HA \times HB)(HP - HQ)(1 - \alpha) = 0,$$

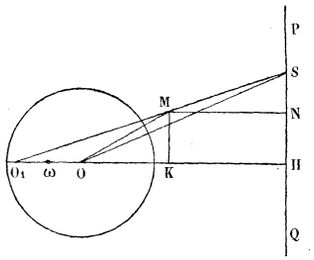
qui entraîne $HP \times HQ = HA \times HB$, et établit la proposition, le point H étant d'égale puissance par rapport aux cercles O et O_2.

Théorème II. — *Le lieu géométrique des points dont la puissance par rapport à un cercle donné est à la distance à une droite donnée, comptée parallèlement à une direction donnée, dans un rapport donné, est un cercle ayant la droite donnée pour axe radical avec le cercle donné.*

Hosted by Google

Soit O le cercle donné dont le rayon est R, PQ la droite donnée, M un point du lieu (*fig.* 16).

Fig. 16.



Remarquons que la distance de M à PQ, comptée parallèlement à une direction donnée, est dans un rapport constant avec la distance MN, normale à PQ; il suffit donc de chercher le lieu demandé pour le cas de la distance normale.

Abaissons, du point O, OH perpendiculaire à PQ, et du point M, MK perpendiculaire à OH; on doit avoir, par définition,

$$\overline{MO}^2 - R^2 = a \times MN,$$

a étant une longueur résultant des données.

Prenons sur OH, en sens contraire de OH si le point M est extérieur au cercle O, et dans le même sens s'il est intérieur, une longueur OO_1 égale à $\frac{a}{2}$, puis désignons par ω le point milieu de OO_1; joignons O_1M par une droite rencontrant PQ en S, et SO par une deuxième droite.

Dans le triangle O_1OM, nous avons

$$\overline{O_1M}^2 - \overline{OM}^2 = \overline{O_1K}^2 - \overline{OK}^2 = (O_1K - OK)(O_1K + OK)$$
$$= \frac{a}{2} \times 2\omega K = a \times \omega K.$$

Hosted by Google

Dans le triangle O_1SO, on trouve de même

$$\overline{O_1S}^2 - \overline{OS}^2 = \overline{O_1H}^2 - \overline{OH}^2 = (O_1H - OH)(O_1H + OH)$$
$$= a \times \omega H = a \times (\omega K + KH).$$

Retranchant ces deux égalités membre à membre,

$$\overline{O_1S}^2 - \overline{O_1M}^2 + \overline{OM}^2 - \overline{OS}^2 = a \times KH = a \times MN;$$

et, d'après l'égalité de définition,

$$\overline{O_1S}^2 - \overline{O_1M}^2 + \overline{OM}^2 - \overline{OS}^2 = \overline{OM}^2 - R^2.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\overline{O_1S}^2 - \overline{O_1M}^2 = \overline{OS}^2 - R^2;$$

elle exprime que le point M du lieu appartient à un cercle fixe ayant O_1 pour centre et PQ pour axe radical avec le cercle O.

Définitions.

II. Si l'on considère une suite de couples de deux points situés sur une ligne droite, et tels que le produit des distances des deux points formant un couple à un point fixe de la droite soit constant, ces couples de points sont dits placés *en involution*.

Le point fixe de la droite est le *centre* de l'involution, et le produit fixe en est la *puissance*.

Il résulte de cette définition que si l'on considère une suite de cercles ayant un même axe radical, leurs points d'intersection avec une droite quelconque de leur plan sont situés en involution, le centre de cette involution étant placé au point commun de la droite considérée et de l'axe radical commun aux cercles, et la puissance de l'involution étant celle de ce point par rapport aux cercles.

Hosted by Google

Il en résulte encore que, si l'on considère sur une droite quatre points se correspondant deux à deux, que par deux de ces points correspondants on fasse passer un cercle, et par les deux autres un deuxième cercle, tous les autres cercles ayant même axe radical avec les deux précédents formeront, par leur intersection avec la droite, une involution complètement déterminée par les quatre points considérés.

Ainsi, un système de points en involution est déterminé par deux cercles et une droite situés dans le même plan : cette définition ne suppose même pas les deux couples de points donnés réels ; en effet, les deux cercles donnés et la droite associée de leur plan commun peuvent ne pas tous se couper réellement deux à deux.

Si les deux cercles, qui, pris avec une droite de leur plan commun, déterminent une involution, ne coupent pas réellement leur axe radical, ou le coupent réellement en deux points situés d'un même côté de la droite, il existe, parmi les cercles ayant même axe radical avec les deux cercles donnés, deux cercles réels tangents à la droite en deux points qui se correspondent chacun à lui-même, et qui sont dits *points doubles de l'involution;* ces points doubles sont placés à égale distance du centre de l'involution et de part et d'autre de ce centre. Dans ce cas, deux points formant un couple sont essentiellement placés d'un même côté du centre, et de telle sorte que deux points d'un même couple comprennent deux points d'un autre couple, ou soient compris entre ces deux points, si ces quatre points sont situés d'un même côté du centre; la puissance de l'involution est alors positive.

Dans le cas particulier où l'axe radical commun aux cercles deviendrait parallèle à la droite, le centre de l'in-

Hosted by Google

volution ainsi que l'un des points doubles passeraient à l'infini; le second point double resterait à distance finie, au point de rencontre de la droite et de la ligne des centres des cercles; deux points correspondants quelconques seraient placés à égale distance du point double restant à distance finie; la puissance de cette involution serait infinie.

Si, au contraire, les deux cercles, qui, pris avec une droite de leur plan commun, déterminent une involution, coupent réellement leur axe radical en deux points situés de part et d'autre de la droite, deux points d'un couple se trouvent placés de part et d'autre du centre de l'involution, un seul des points d'un couple se trouve compris entre deux points d'un autre couple; il n'existe pas dans ce cas de point double réel; la puissance de l'involution est alors négative.

Dans tous les cas, si deux points d'une involution forment un couple, les deux points symétriques de ceux-là par rapport au centre forment aussi un couple; le point correspondant au centre passe à l'infini.

Nous avons vu au commencement du présent numéro que deux couples de points a et a', b et b', situés sur une droite déterminaient une involution; si c et c' sont deux points d'un autre couple de la même involution, nous donnerons, pour abréger, la dénomination de **rapport involutif** du point c par rapport aux deux systèmes de points a et a', b et b', au rapport des puissances du point c par rapport aux deux systèmes de points a et a', b et b'; soit : $\frac{ca \times ca'}{cb \times cb'}$.

D'après le théorème I, établi au numéro précédent, il est évident que le **rapport involutif** du point c est égal à celui du point c' qui forme couple avec lui; et aussi

Hosted by Google

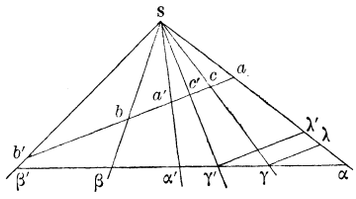
que, si les **rapports involutifs** de deux points de la droite par rapport à a et a', b et b' sont égaux, ces deux points forment une involution avec a et a', b et b'.

Si l'on considère un système de points en involution et qu'on les unisse par des lignes droites à un point fixe S, pris hors de la droite qui les contient, le système de ces droites de jonction forme un faisceau qui porte le nom de *faisceau en involution,* le point S en est le sommet; dans le cas où l'involution renferme des points doubles, les rayons qui passent par ces points sont dits *rayons doubles.*

III. Théorème. — *Toute sécante rectiligne à un faisceau en involution, ne passant pas par le sommet, détermine par ses intersections avec les rayons du faisceau un système de points en involution.*

Soit $Saa'bb'cc'$ un faisceau en involution (*fig.* 17), coupons-le par la sécante rectiligne $\beta'\alpha$ rencontrant les rayons Sa, Sa', Sb, Sb', Sc, Sc', respectivement en α, α', β, β', γ, γ'; par les points γ, γ', menons $\gamma\lambda$, $\gamma'\lambda'$, parallèles à $b'a$.

Fig. 17.



De la considération des couples de triangles semblables : $\gamma\alpha\lambda$ et $\gamma'\alpha\lambda'$, Sca et $S\gamma\lambda$, $Sc'a$ et $S\gamma'\lambda'$, on déduit les égalités de rapports

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma\lambda} = \frac{\gamma'\alpha}{\gamma'\lambda'}, \qquad \frac{\gamma\lambda}{ca} = \frac{S\gamma}{Sc}, \qquad \frac{S\gamma'}{Sc'} = \frac{\gamma'\lambda'}{c'a}.$$

Hosted by Google

Multipliant ces trois égalités membre à membre et réduisant, on a

$$(1) \qquad \frac{\gamma\alpha}{ca} \times \frac{S\gamma'}{Sc'} = \frac{\gamma'\alpha}{c'a} \times \frac{S\gamma}{Sc}.$$

Par des considérations analogues, on trouve

$$(2) \qquad \frac{\gamma\alpha'}{ca'} \times \frac{S\gamma'}{Sc'} = \frac{\gamma'\alpha'}{c'a'} \times \frac{S\gamma}{Sc},$$

$$(3) \qquad \frac{\gamma\beta}{cb} \times \frac{S\gamma'}{Sc'} = \frac{\gamma'\beta}{c'b} \times \frac{S\gamma}{Sc},$$

$$(4) \qquad \frac{\gamma\beta'}{cb'} \times \frac{S\gamma'}{Sc'} = \frac{\gamma'\beta'}{c'b'} \times \frac{S\gamma}{Sc}.$$

Multipliant membre à membre les égalités (1) et (2), et séparément les égalités (3) et (4), puis divisant la première ainsi obtenue par la deuxième, on a

$$\frac{\gamma\alpha.\gamma\alpha'}{\gamma\beta.\gamma\beta'} \times \frac{cb.cb'}{ca.ca'} = \frac{\gamma'\alpha.\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta.\gamma'\beta'} \times \frac{c'b.c'b'}{c'a.c'a'}.$$

Or, les deux rapports $\frac{ca.ca'}{cb.cb'}$, $\frac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'}$ sont égaux, car ce sont les rapports involutifs des deux points correspondants c et c' par rapport aux couples de points a et a', b et b', qui sont en involution avec eux; il en résulte l'égalité des rapports $\frac{\gamma\alpha.\gamma\alpha'}{\gamma\beta.\gamma\beta'}$ et $\frac{\gamma'\alpha.\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta.\gamma'\beta'}$, et comme ces rapports sont les rapports involutifs des points γ et γ' par rapport aux couples de points α et α', β et β', il s'ensuit que ces six points font partie de l'involution déterminée par les couples de points α et α', β et β' (*fin du numéro précédent*).

Remarque I.— Si l'involution définie par les couples de points a et a', b et b' a des points doubles réels, il en est de même de celle qui est définie par les couples de points α et α', β et β', et les points doubles des deux

Hosted by Google

involutions sont deux à deux sur les mêmes rayons; mais il n'en est pas de même des centres de ces deux involutions, car le centre de chacune d'elles est situé sur le rayon conjugué de celui qui est parallèle à la direction de la sécante : dès lors, ils ne peuvent être situés sur le même rayon que si les deux sécantes sont parallèles.

Remarque II. — Dans un faisceau en involution il existe toujours, et il n'existe en général qu'un système de rayons rectangulaires; en effet, si nous coupons le faisceau par une sécante quelconque, les points de rencontre de cette droite et des rayons du faisceau forment un système de points en involution. Le cercle variable passant par deux de ces points associés, et par le sommet du faisceau, coupe le rayon qui passe par le centre en un second point fixe, d'après la propriété des sécantes menées d'un point à un cercle. Dès lors il suffira, pour avoir des rayons rectangulaires, de faire passer par ce point et le sommet du faisceau un cercle ayant son centre sur la droite; les rayons passant par les points communs de ce cercle et de la droite seront associés et rectangulaires. Il n'y a, en général, qu'un cercle passant par deux points et ayant son centre sur une droite donnée, d'où résulte qu'il n'y a, en général, qu'un système de rayons rectangulaires. Il ne peut y avoir indétermination que si la droite était perpendiculaire au milieu de celle qui unit les deux points; dans ce cas, tous les rayons associés seraient rectangulaires.

Involution des diamètres conjugués des coniques à centre, et applications.

IV. Nous avons vu au Chapitre I, n°s IV et XIV, que les parallèles à deux diamètres conjugués d'une section

Hosted by Google

elliptique, ou hyperbolique, menées par le sommet du cône, déterminaient, sur l'intersection de leur plan avec celui de la base circulaire, deux points dont le produit des distances à un point fixe de cette droite était constant ; il résulte du numéro précédent que ces parallèles forment un faisceau en involution ; qu'il en est de même des diamètres conjugués de ces deux courbes qui forment un faisceau superposable sur le précédent.

Le faisceau des diamètres conjugués d'une section elliptique n'a point de rayons doubles, puisque le centre de l'involution qu'ils déterminent sur l'intersection du plan de l'ellipse et de celui de la directrice circulaire est situé entre deux points conjugués quelconques (n° IV, Ch. I).

Au contraire, le faisceau des diamètres conjugués de l'hyperbole admet toujours deux rayons doubles qui coïncident avec les asymptotes, comme cela résulte des propriétés des diamètres conjugués de cette courbe, établies au n° XIV (Ch. I). Du numéro précédent résulte alors : 1° *que le système des diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole détermine un système de points en involution sur une droite quelconque du plan de la courbe ;* 2° *que le centre de cette involution est le point où la droite est rencontrée par le diamètre conjugué de sa direction.*

Nous nous proposons actuellement de généraliser le lemme établi au n° VII (Ch. I).

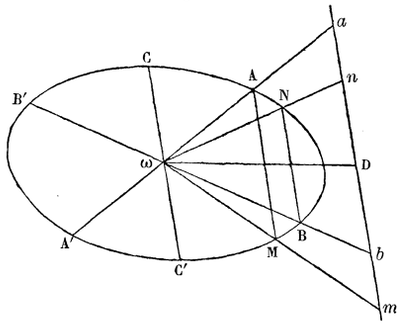
Si par deux des extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse on mène deux sécantes parallèles, les secondes extrémités de ces sécantes sont celles de deux autres diamètres conjugués.

Soient ω une ellipse (*fig.* 18), ωA, ωB deux diamètres conjugués de la courbe ; par les points A et B menons

Hosted by Google

les cordes parallèles AM, BN, je dis que ωM et ωN forment un système de deux diamètres conjugués. En effet, construisons le diamètre ωC parallèle aux cordes

Fig. 18.



AM, BN, et son conjugué ωD qui les divise en parties égales; menons la droite *am* parallèle arbitraire à ωC, le faisceau des quatre droites ω, ABCD détermine l'involution des diamètres conjugués, et D est le centre de l'involution des points de rencontre des rayons de ce faisceau avec *am*. Or on a évidemment $Dn = Db$ et $Dm = Da$, puisque deux parallèles sont coupées en parties proportionnelles par plusieurs droites issues d'un point; dès lors on a : $Dm \times Dn = Da \times Db$, ce qui montre que ωM, ωN sont conjugués dans le faisceau, et, en conséquence, forment un système de diamètres conjugués.

Remarque I. — Cette propriété a également lieu pour l'hyperbole en définissant, comme nous l'avons fait, l'extrémité d'un diamètre qui ne rencontre pas la courbe.

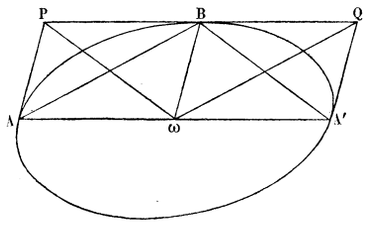
Le produit des segments interceptés sur une tangente à une ellipse, entre le point de contact et ses

Hosted by Google

points de rencontre avec deux diamètres conjugués, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la direction de la tangente.

Soient ω une ellipse (*fig.* 19), AA′ un diamètre quelconque, PQ une parallèle tangente en B ; ωB sera le dia-

Fig. 19.



mètre conjugué de AA′, et B le centre de l'involution que détermine sur PQ le faisceau des diamètres conjugués de l'ellipse. Menons les tangentes AP, A′Q aux extrémités du diamètre AA′; elles sont parallèles à ωB et déterminent les deux parallélogrammes ωAPB, ωA′QB.

Joignons par des lignes droites ωP, ωQ, AB, A′B; ωP, ωQ sont deux diamètres conjugués, car ils sont respectivement parallèles à A′B, AB, qu'ils divisent en parties égales; dès lors, le produit des segments BP, BQ, qu'ils interceptent sur la tangente est égal à la puissance de l'involution déterminée sur cette droite par le faisceau des diamètres conjugués; or ce produit est visiblement égal à $\omega A \times \omega A' = \overline{\omega A}^2$, puisque $\omega A = PB$, et $\omega A' = BQ$. C. Q. F. D.

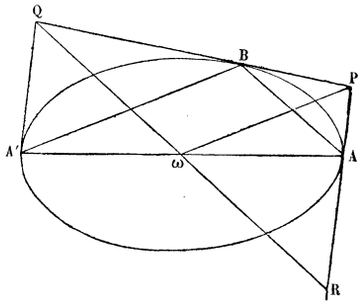
Une tangente en un point variable d'une ellipse intercepte sur deux tangentes parallèles fixes, à partir de leurs points de contact, deux segments dont le pro-

Hosted by Google

duit est constant et égal au carré du demi-diamètre parallèle à la direction des tangentes fixes.

Soient ω une ellipse (*fig.* 20), AP, A′Q deux tangentes fixes parallèles, dont les points de contact A, A′ sont

Fig. 20.



diamétralement opposés, PQ une tangente mobile dont le point de contact est B; tracons les droites AB, A′B, et les diamètres ωP, ωQ.

Le point P d'intersection des polaires de A et B est le pôle de AB par rapport à l'ellipse; donc la polaire de tout point de AB et en particulier de celui qui est situé à l'infini, passe par le point P, n° XIX, Chap. I; or la polaire du point situé à l'infini sur AB est le diamètre conjugué de la direction de cette droite; donc ωP divise AB en deux parties égales. On verrait de même que ωQ divise A′B en deux parties égales, et il en résulte que chacun des diamètres ωP, ωQ divisant en parties égales les cordes parallèles à l'autre, ces deux diamètres sont conjugués.

D'après le théorème précédent, le produit des segments AP, AR, interceptés sur la tangente AP par les deux diamètres conjugués ωP, ωQ est égal au carré du demi-diamètre parallèle à AP; mais les deux triangles

Hosted by Google

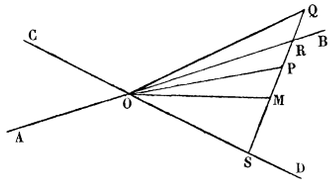
ωAR, $\omega A'Q$ sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, d'où résulte l'égalité des côtés AR, A'Q, et, en conséquence, le produit $AP \times A'Q$ est aussi égal au carré du demi-diamètre parallèle aux tangentes AP ,A'Q.

Remarque II. — Ces deux propositions s'appliquent également à l'hyperbole : établissons la première ; la seconde s'en déduit d'après les mêmes considérations que pour l'ellipse.

Le produit des segments interceptés sur une tangente à une hyperbole entre le point de contact et ses points de rencontre avec deux diamètres conjugués est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la direction de la tangente.

Soient AB, CD les asymptotes d'une hyperbole dont le centre est O (*fig.* 21), RS une tangente à cette courbe. D'après ce que nous avons vu au n° XVII,

Fig. 21.



Chap. I, son point de contact est placé au milieu M du segment RS intercepté entre les asymptotes, et MR représente le demi-diamètre parallèle à la direction de la tangente MR.

Dans l'involution déterminée sur la tangente par le faisceau des diamètres conjugués, M est le centre, et R et S sont les points doubles; on en conclut

$$\overline{MR}^2 = MP \times MQ,$$

Hosted by Google

si P et Q sont les points de rencontre de deux diamètres conjugués avec la tangente, ce qui démontre le théorème énoncé.

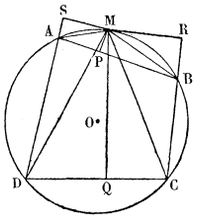
Enfin, **et c'est là une conséquence importante du numéro précédent,** *la perspective d'un faisceau en involution sur un plan est encore un faisceau en involution*, puisqu'un rayon du faisceau donné et sa perspective rencontrent au même point l'intersection de leurs plans.

Théorème de Pappus.

V. *Si d'un point pris sur la circonférence d'un cercle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées sur deux côtés opposés est égal à celui des perpendiculaires abaissées sur les deux autres.*

Soient O la circonférence considérée (*fig.* 22), ABCD le quadrilatère inscrit, MP, MQ les perpendiculaires

Fig. 22.



abaissées du point M sur les deux côtés opposés AB, CD; MR, MS les perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres. Joignons le point M aux points A, B, C, D, par des lignes droites : on a, d'après un théorème connu, et désignant par R le rayon du cercle O,

$$MA \times MB = MP \times 2R, \qquad MD \times MC = MQ \times 2R;$$

d'où, multipliant ces égalités membre à membre,

$$MA \times MB \times MC \times MD = 4R^2 \times MP \times MQ;$$

on trouve encore par l'application du même théorème

$$MA \times MB \times MC \times MD = 4R^2 \times MR \times MS;$$

de là, par comparaison,

$$MP \times MQ = MR \times MS.$$

Ce théorème s'applique aux sections planes d'un cône à base circulaire avec une légère modification d'énoncé :

Si d'un point pris sur une section conique on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées de ce point sur deux côtés opposés du quadrilatère est au produit des perpendiculaires abaissées sur les deux autres dans un rapport constant.

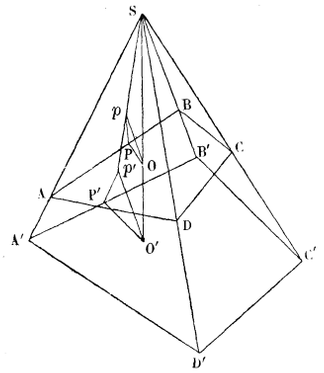
Si l'on unit les sommets du quadrilatère inscrit dans la section conique au sommet du cône, auquel elle appartient, par des lignes droites, génératrices du cône, ces droites rencontrent la circonférence directrice du cône en quatre points, sommets d'un quadrilatère inscrit dans cette circonférence et dont le quadrilatère inscrit dans la conique peut être considéré comme la perspective.

Soient S le sommet du cône, ABCD le quadrilatère inscrit dans la conique, et perspective du quadrilatère A'B'C'D' inscrit dans la directrice circulaire (*fig.* 23); soit O un point du plan ABCD, traçons la droite SO et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en O' avec le plan A'B'C'D'; puis des points O et O' abaissons les perpendiculaires Op, O'p' sur le plan SAB, et pP, p'P' respectivement perpendiculaires sur AB, A'B'; enfin joignons par des lignes droites OP, O'P'. OP et O'P' sont respec-

Hosted by Google

tivement perpendiculaires à AB et A′B′, d'après le théorème des trois perpendiculaires; de plus, dans les triangles rectangles OPp, O′P′p', les angles en P et P′

Fig. 23.



sont fixes comme angles rectilignes des dièdres aigus formés par le plan SAB avec les plans ABCD, A′B′C′D′; il en résulte que dans ces triangles les rapports des hypoténuses OP, O′P′, aux côtés Op, O′p', sont des nombres fixes, et que le rapport $\frac{OP}{O'P'}$ est égal au produit du rapport $\frac{Op}{O'p'}$ par un nombre constant, soit α_1, d'où

$$\frac{OP}{O'P'} = \alpha_1 \frac{Op}{O'p'}.$$

Comme, du reste, les triangles SO′p', SOp sont semblables, puisque Op, O′p', perpendiculaires à un même plan, sont parallèles, on a $\frac{Op}{O'p'} = \frac{SO}{SO'}$ et, en conséquence,

$$(1) \qquad \frac{OP}{O'P'} = \alpha_1 \frac{SO}{SO'}.$$

On trouverait de même, désignant par Q, R, S les

pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les droites DC, BC, AD, et de même par Q′, R′, S′ ceux des perpendiculaires abaissées du point O′ sur les droites D′C′, B′C′, A′D′, respectivement :

$$\frac{OQ}{O'Q'} = \alpha_2 \frac{SO}{SO'}, \tag{2}$$

$$\frac{OR}{O'R'} = \alpha_3 \frac{SO}{SO'}, \tag{3}$$

$$\frac{OS}{O'S'} = \alpha_4 \frac{SO}{SO'}, \tag{4}$$

α_2, α_3, α_4 étant des coefficients constants.

On déduit des égalités (1), (2), (3), (4), par une transformation évidente,

$$\frac{OP \times OQ}{OR \times OS} = \frac{O'P' \times O'Q'}{O'R' \times O'S'} \times \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3 \alpha_4}.$$

Si nous supposons alors le point O placé en un point de la section conique, le point O′ sera placé sur la circonférence directrice; dès lors on aura, d'après le théorème précédent,

$$\frac{O'P' \times O'Q'}{O'R' \times O'S'} = 1,$$

d'où

$$\frac{OP \times OQ}{OR \times OS} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3 \alpha_4},$$

qui établit le théorème énoncé.

Théorème et application à la construction des points communs d'une droite quelconque et d'une conique dont on donne cinq points.

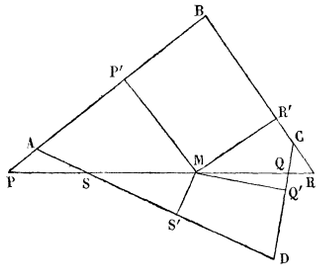
VI. *Si l'on considère une conique circonscrite à un quadrilatère et que par un quelconque de ses points on mène une parallèle à une direction fixe, le* **rapport involutif** *de ce point, par rapport aux deux couples*

Hosted by Google

de points de rencontre de la sécante avec les deux systèmes de côtés opposés du quadrilatère, est un nombre constant.

Soient ABCD le quadrilatère inscrit, PS la sécante parallèle à une direction fixe menée par le point M variable sur la conique circonscrite, et coupant les couples de côtés opposés du quadrilatère aux points P et Q, R et S (*fig.* 24). Abaissons du point M les perpendiculaires MP′, MQ′, MR′, MS′, sur les côtés du quadrilatère; les triangles rectangles MP′P, MQ′Q, MR′R, MS′S, restent semblables à eux-mêmes dans le déplacement de la sécante : il en résulte qu'on a les égalités

Fig. 24.



$$MP = MP'.\beta_1, \qquad MQ = MQ'.\beta_2,$$
$$MR = MR'.\beta_3, \qquad MS = MS'.\beta_4;$$

β_1, β_2, β_3, β_4 étant des nombres fixes; et, en conséquence, on a

$$\frac{MP \times MQ}{MR \times MS} = \frac{MP' \times MQ'}{MR' \times MS'} \times \frac{\beta_1.\beta_2}{\beta_3.\beta_4}.$$

Or, d'après le théorème de **Pappus,** établi au numéro précédent, le second membre est fixe.

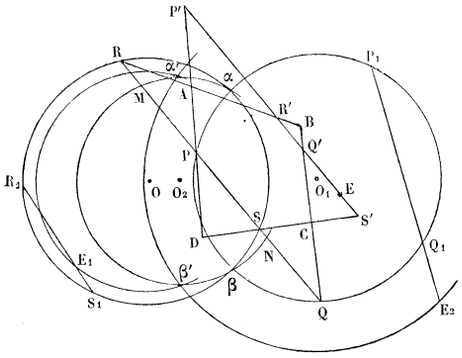
Le second membre de l'égalité précédente est numériquement fixe : on pourra définir son signe, d'après

ceux des segments MP, MQ, MR, MS, pour une position particulière du point M; ce signe, une fois déterminé, restera le même pour tous les points de la courbe, car il ne peut changer que tout autant que l'un des segments change de signe, et cela ne peut arrriver que tout autant que le point M, dans son déplacement continu, vient passer par un des sommets du quadrilatère inscrit; dans ce cas, deux des segments changent à la fois de signe, et le rapport involutif conserve le sien.

On déduit de ce théorème une construction, **relativement simple,** des points communs d'une conique, dont on donne cinq points, et d'une droite quelconque.

Soient A, B, C, D, E cinq points d'une conique, RQ une droite donnée (*fig.* 25); construisons le quadrilatère

Fig. 25.



inscrit ABCD, et menons par le point E une parallèle P'S' à RQ. D'après le théorème précédent et si M, N sont les points communs de la conique et de la droite RQ, les trois rapports involutifs

$$\frac{ER' \times ES'}{EP' \times EQ'}, \qquad \frac{NR \times NS}{NP \times NQ}, \qquad \frac{MR \times MS}{MP \times MQ},$$

sont égaux; il en résulte que, si l'on construit deux cercles, soit O passant par R et S, et O_1 passant par P et Q, les points M et N appartiennent au cercle lieu des points dont les puissances par rapport aux cercles O et O_1 sont dans le rapport $\frac{ER' \times ES'}{EP' \times EQ'}$, n° I, Chap. II.

Ce dernier cercle, dont les points communs avec la droite RQ sont les points cherchés, peut être construit; en effet, on sait d'abord qu'il a même axe radical avec les deux cercles O et O_1 et qu'en conséquence il passe par leurs points communs α et β; en second lieu, on peut en déterminer facilement un et même deux autres points. Si nous inscrivons dans les cercles O et O_1 deux cordes R_1S_1, P_1Q_1 respectivement égales à $R'S'$, $P'Q'$, puis que nous prenions sur elles les segments R_1E_1, P_1E_2, respectivement égaux à $R'E$, $P'E$, le cercle décrit de O comme centre avec OE_1 pour rayon sera le lieu des points dont les puissances, par rapport au cercle O, sont égales à $ER' \times ES'$, et celui qui est décrit de O_1 comme centre avec O_1E_2 pour rayon sera le lieu des points dont les puissances par rapport au cercle O_1 sont égales à $EP' \times EQ'$; les points communs α', β' de ces deux cercles appartiennent au cercle cherché, dont on connaît ainsi quatre points, ce qui permet de le décrire.

Remarque I. — On peut ainsi remplacer les deux points communs, réels ou imaginaires, de la conique et de la droite par ceux de la droite et d'un cercle facile à construire.

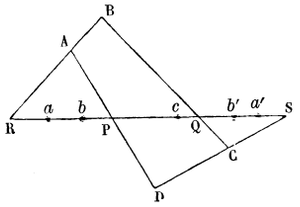
Remarque II. — En dehors de ses autres usages, cette construction peut être utilisée, en **Géométrie descriptive**, pour construire les tangentes au point double effectif de deux quadriques qui ont un plan tangent commun et même point de contact.

Hosted by Google

VII. Théorème. — *Si trois coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, et que par un point variable de l'une d'elles on mène une sécante rectiligne parallèle à une direction fixe, le rapport involutif de ce point par rapport aux deux couples de points de rencontre de la sécante avec les deux autres coniques est un nombre constant.*

Soient ABCD le quadrilatère inscrit dans les trois coniques (*fig.* 26), PQ la sécante parallèle à la direc-

Fig. 26.



tion donnée menée par le point c d'une de ces courbes. Soient P et Q, R et S les points de rencontre de la sécante avec les couples de côtés opposés du quadrilatère, a et a', b et b' les couples de points de rencontre avec les deux autres courbes.

D'après le théorème précédent, on a, θ, θ_1, θ_2 étant des nombres fixes,

$$\frac{aP \times aQ}{aR \times aS} = \theta = \frac{a'P \times a'Q}{a'R \times a'S}.$$

Ramenons ces deux égalités à la forme entière; en prenant le point c pour origine des distances, nous aurons

$$(ca - cP)(ca + cQ) = \theta(cR - ca)(ca + cS),$$
$$(ca' + cP)(ca' - cQ) = \theta(ca' + cR)(cS - ca').$$

Ordonnons ces deux égalités, lues aux premiers membres, par rapport aux puissances décroissantes de

Hosted by Google

ca, ca', respectivement, et remarquant que

$$cP \times cQ = cR \times cS \times \theta_2,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\overline{ca}^2(1+\theta) + ca\,[cQ - cP + \theta(cS - cR)] \\ - cR \times cS(\theta_2 + \theta) = 0,\\ \overline{ca'}^2(1+\theta) - ca'[cQ - cP + \theta(cS - cR)] \\ - cR \times cS(\theta_2 + \theta) = 0.\end{aligned}$$

Multipliant la première par ca', la seconde par ca et ajoutant, on trouve

$$(ca + ca')[ca \times ca'(1+\theta) - cR \times cS(\theta_2 + \theta)] = 0,$$

égalité qui exige

$$(1) \qquad ca \times ca'(1+\theta) = cR \times cS(\theta_2 + \theta).$$

Par un calcul analogue et partant des égalités

$$\frac{bP \times bQ}{bR \times bS} = \theta_1 = \frac{b'P \times b'Q}{b'R \times b'S},$$

on trouve

$$(2) \qquad cb \times cb'(1+\theta_1) = cR \times cS(\theta_2 + \theta_1);$$

d'où, divisant membre à membre les égalités (1) et (2),

$$\frac{ca \times ca'}{cb \times cb'} = \frac{(1+\theta_1)(\theta_2+\theta)}{(1+\theta)(\theta_2+\theta_1)};$$

le second membre étant constant, le théorème est démontré.

Théorème de Desargues et sa généralisation.

VIII. Le théorème de Desargues consiste en ce qui suit :

Une sécante rectiligne quelconque détermine par ses rencontres avec une conique et les systèmes de côtés

Hosted by Google

opposés d'un quadrilatère inscrit six points en involution.

La démonstration de ce théorème se déduit immédiatement du théorème qui précède de deux rangs; en effet, puisque, conformément à ce théorème, le rapport involutif du point M par rapport aux couples de points P et Q, R et S, est le même pour tous les points de la courbe, quand la sécante se déplace parallèlement à une direction fixe; il aura la même valeur pour le second point commun M′ de la sécante PR avec la courbe; en conséquence, les deux points M, M′, ayant même rapport involutif par rapport aux deux couples de points P et Q, R et S, forment avec eux un système en involution (n° II, Chap. II, fin).

La généralisation du théorème de Desargues par Sturm consiste en ce qui suit :

Une sécante rectiligne quelconque détermine par ses rencontres avec trois coniques circonscrites au même quadrilatère un système de six points en involution.

Cette généralisation se déduit du théorème du numéro précédent par le raisonnement au moyen duquel nous avons déduit le théorème de Desargues de celui qui précède de deux rangs; nous ne nous y arrêterons pas.

Conséquence du théorème de Desargues. — *Si trois côtés d'un quadrilatère inscrit dans une conique tournent autour de trois points fixes pris sur une ligne droite, la quatrième tourne autour d'un point fixe de la même droite.*

En effet, le point où le quatrième côté rencontre la droite est le conjugué du point de rencontre du côté opposé avec la même droite, dans l'involution déterminée par les deux autres points et les deux points de ren-

Hosted by Google

contre de la conique avec la droite; et ceci a lieu alors même que les points communs de la conique et de la droite seraient imaginaires, puisqu'on peut toujours remplacer les points communs d'une conique et d'une droite par ceux d'un cercle et de la même droite (n° VI, Chap. II).

Note sur le n° VII du présent Chapitre. — La démonstration analytique du théorème du n° VII, dont celui du n° VI n'est qu'un cas particulier, est presque immédiate; on sait en effet que, si les équations de deux coniques, rapportées au même système d'axes rectilignes, sont $F(x, y) = 0$, $F_1(x, y) = 0$, l'équation générale des coniques passant par les points communs des deux premières est : $F(x, y) + \lambda F_1(x, y) = 0$, λ étant un coefficient constant pour chacune de ces courbes.

On sait encore que les distances du point du plan dont les coordonnées sont x_0, y_0, aux points où une droite passant par (x_0, y_0) et dont le point directeur ayant pour coordonnées a, b rencontre la courbe $F(x, y) = 0$, sont les racines de l'équation

$$F(x_0, y_0) + \rho(aF'_{x_0} + bF'_{y_0}) + \rho^2\varphi(a, b) = 0,$$

$\varphi(x, y)$ étant l'ensemble des termes du second degré de $F(x, y)$.

Il en résulte que le produit de ces distances est égal à $\frac{F(x_0, y_0)}{\varphi(a, b)}$; de même le produit des distances du point (x_0, y_0) aux points où la même droite rencontre la courbe $F_1(x, y) = 0$ est égal à $\frac{F_1(x_0, y_0)}{\varphi_1(a, b)}$.

Or l'équation $F(x_0, y_0) + \lambda F_1(x_0, y_0) = 0$, qui est vérifiée par les coordonnées de tout point, (x_0, y_0), de la troisième courbe, peut se mettre sous la forme

$$\frac{\dfrac{F(x_0, y_0)}{\varphi(a, b)}}{\dfrac{F_1(x_0, y_0)}{\varphi_1(a, b)}} = -\lambda\frac{\varphi_1(a, b)}{\varphi(a, b)};$$

et sous cette forme elle exprime que le rapport involutif du point (x_0, y_0), par rapport aux couples de points où la droite, définie de direction par le point (a, b), et passant par le point (x_0, y_0), rencontre les deux autres courbes, est constant.

Cette démonstration est sans doute très simple; mais je dois à la vérité de dire que, quoique j'aie eu l'occasion de retourner et de voir retourner l'équation $F(x, y) + \lambda F_1(x, y) = 0$ de bien des manières, il ne m'est jamais venu à l'esprit de l'interpréter ainsi; et que, si je

Hosted by Google

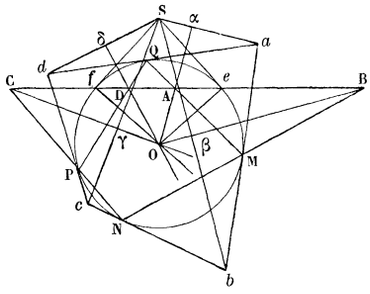
n'avais été conduit par les considérations géométriques de la présente étude, je ne l'aurais probablement jamais connue.

Théorème corrélatif de celui de Desargues.

IX. *Si l'on considère une circonférence de cercle et un quadrilatère circonscrit, qu'on joigne un point de son plan aux deux couples de sommets opposés du quadrilatère, que du même point on mène les deux tangentes au cercle, ces trois couples de deux droites font partie d'un faisceau en involution.*

Soient *abcd* le quadrilatère circonscrit à la circonférence O (*fig.* 27), S le point de son plan, S*e*, S*f* les

Fig. 27.



deux tangentes issues de ce point; il s'agit de démontrer que les trois couples de droites S*a* et S*c*, S*e* et S*f*, S*b* et S*d* forment un faisceau en involution.

Construisons le quadrilatère inscrit dont les sommets M, N, P, Q sont les points de contact des côtés du quadrilatère circonscrit et prolongeons ses côtés opposés jusqu'à leurs points de rencontre avec la polaire *ef* du point S, par rapport au cercle O, en A, B, C, D.

L'un de ces points, A par exemple, étant le point commun des polaires des points S et *a* par rapport au

Hosted by Google

cercle O, est le pôle de la droite Sa : dès lors OAα est perpendiculaire sur Sa; on voit de même que Oe, OβB, OγC, Of, ODδ sont respectivement perpendiculaires sur Se, Sb, Sc, Sf, Sd; il en résulte que le faisceau des droites admettant pour rayons associés Sa et Sc, Se et Sf, Sb et Sd, est superposable sur celui dont les rayons correspondants OA et OC, Oe et Of, OB et OD, leur sont respectivement perpendiculaires; et, comme ces derniers forment un faisceau en involution, d'après le théorème de Desargues, il en est de même des premiers, ce qu'on voulait démontrer.

Le théorème qu'on vient de démontrer pour le cercle s'applique également à l'une quelconque des trois sections coniques; en effet, une quelconque des trois sections coniques est, par définition, la perspective d'un cercle en prenant le sommet du cône pour point de vue; un quadrilatère circonscrit à la conique est celle d'un quadrilatère circonscrit au cercle; dès lors, si l'on unit un point du plan d'une conique aux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à cette conique, et que du même plan on lui mène des tangentes, ces six droites seront perspectives de six droites du plan du cercle qui font partie d'un faisceau en involution, d'après le théorème précédent; il résulte de ce qui a été dit à la fin du n° IV, Ch. II, que ces six droites font aussi partie d'un faisceau en involution.

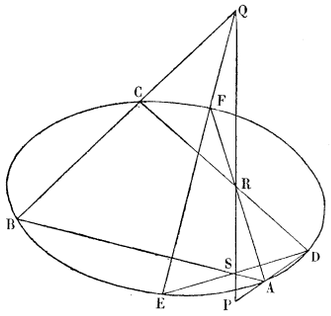
X. Théorème de Pascal. — *Les points de rencontre des trois couples de côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont situés en ligne droite.*

Soit l'hexagone ABCDEF inscrit dans une conique (*fig.* 28) : construisons la diagonale AD, unissant deux sommets opposés, et prenons son point commun P avec la droite QR, qui joint les points Q et R où se coupent

Hosted by Google

deux systèmes de deux côtés opposés, BC et FE, DC et AF. Trois côtés AD, DC, CB du quadrilatère inscrit ADCB passent par les trois points P, Q, R; il en est de même des trois côtés AD, AF, FE du quadrilatère in-

Fig. 28.



scrit AFED; donc les quatrièmes côtés de ces quadrilatères, AB et DE, vont se couper au même point S de la droite QR, ce qu'on voulait démontrer (conséquence du théorème de Desargues, n° VIII, Chap. II).

Ce théorème continue à avoir lieu si un ou plusieurs côtés de l'hexagone deviennent nuls, en remplaçant chaque côté devenant nul par la tangente qui en est la limite (¹).

XI. Théorème de Brianchon. — *Les diagonales unissant deux sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique se coupent en un même point.*

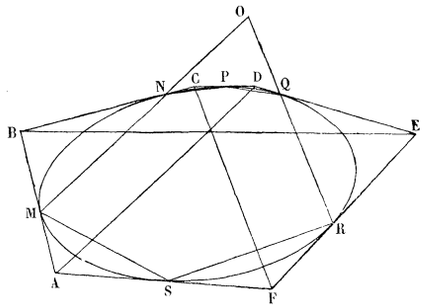
Soit ABCDEF un hexagone circonscrit à une conique

(¹) Si l'on admet le théorème de Pascal pour le cercle, et il y en a plusieurs démonstrations élémentaires que nous n'avons pas à rapporter, on peut en déduire que ce théorème a aussi lieu pour une conique quelconque, considérée comme perspective d'un cercle, ce qui constitue une démonstration simple du même théorème.

Hosted by Google

(*fig.* 29), M, N, P, Q, R, S les points de contact des côtés qui sont les sommets d'un hexagone inscrit; considérons la diagonale BE qui unit deux sommets opposés de l'hexagone circonscrit. La droite MN passant par les

Fig. 29.



pôles M et N des tangentes AB, BC, par rapport à la conique, a pour pôle leur point commun B (n° XIX, Chap. I); de même la droite QR a pour pôle le point E où se coupent les tangentes DE, EF; la diagonale BE passant par les pôles B et E des cordes MN et QR, le point O où se coupent ces cordes est le pôle de la droite BE.

Or ce point O est un des points de la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit : dès lors la droite BE passe par le pôle de la droite de Pascal; il en est de même des deux autres diagonales AD, CF : donc ces trois diagonales se coupent en un même point.

Ce théorème continue encore à s'appliquer si deux côtés consécutifs viennent se placer dans le prolongement l'un de l'autre, en considérant le point de contact comme le sommet commun à ces deux côtés; il s'applique encore dans ces conditions s'il en est ainsi pour plusieurs couples de deux côtés consécutifs.

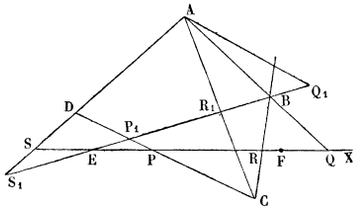
Hosted by Google

Construction d'une conique dont on donne cinq points.

XII. *On donne cinq points, appartenant à une même conique, et l'on se propose d'en construire autant qu'on voudra, ainsi que les tangentes en ces points. On se propose encore de construire le centre de la courbe si elle en a un, de déterminer son genre, deux diamètres conjugués faisant un angle donné, les axes, les sommets, les asymptotes; de lui mener deux tangentes par un point donné de son plan.*

Soient A, B, C, D, E cinq points donnés appartenant à une même conique et supposés à distance finie (*fig.* 30); considérons le quadrilatère inscrit ABCD, et par le point E menons une droite EX dans une direction quelconque; d'après le théorème de Desargues, son

Fig. 30.



second point commun avec la conique sera le point F conjugué de E, dans l'involution déterminée par les deux couples de points P et Q, R et S, où la sécante rencontre les couples de côtés opposés du quadrilatère inscrit, à savoir DC et AB, BC et AD; on le construira en faisant passer deux cercles, le premier par les points P et Q, le second par les points R et S, et enfin un troisième cercle passant par E et ayant avec les précédents même axe radical; le troisième cercle passera par le point F qu'il déterminera.

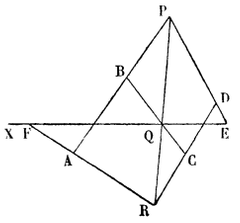
Hosted by Google

Si nous voulons actuellement construire la tangente en un de ces points, soit A, nous pouvons considérer le triangle ADC et la tangente en A comme constituant un quadrilatère inscrit dont les côtés opposés sont AD et AC, DC et la tangente AQ_1 en A. Traçons la droite indéfinie EB, qui rencontre la courbe en E et B : elle rencontrera la tangente en A au point Q_1 conjugué de P_1, dans l'involution déterminée par les points E et B, où elle coupe la courbe, et les points R_1 et S_1, où elle coupe les deux autres côtés opposés du quadrilatère (THÉORÈME DE DESARGUES); on pourra donc construire le point Q_1 et, en conséquence, la tangente AQ_1 en A.

Les mêmes questions peuvent être résolues au moyen du THÉORÈME DE PASCAL.

Soient, en effet, A, B, C, D, E cinq points appartenant à une conique (*fig.* 31) : unissons-les successivement par des lignes droites, et menons, par le point E, la droite EX indéfinie dont nous voulons trouver le second point commun F avec la courbe. ABCDEF est un hexagone inscrit dans la conique, les points P et Q

Fig. 31.

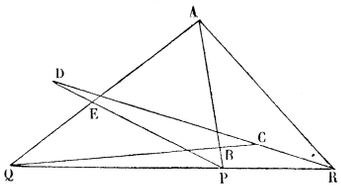


où se coupent les couples de côtés opposés AB et DE, BC et EFX, appartiennent à la droite de Pascal et la déterminent; le point R, où elle est rencontrée par DC, appartient aussi au côté FA; donc, si l'on unit RA, cette droite va rencontrer EX au point F cherché.

Hosted by Google

Supposons actuellement qu'on veuille construire la tangente en un des points donnés, A (*fig.* 32); considérons la figure ABCDE jointe à la tangente en A comme

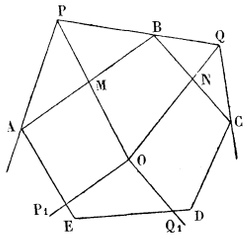
Fig. 32.



un hexagone inscrit, DC étant opposé à la tangente en A. Les points P et Q où se rencontrent les couples de côtés opposés AB et DE, AE et BC, déterminent la droite de Pascal qui va concourir avec le côté DC au même point R que la tangente en A; le point R où se coupent PQ et DC étant connu, en l'unissant au point A, on a la tangente cherchée.

Quel que soit le mode de construction adopté, on pourra toujours, A, B, C, D, E étant les cinq points donnés (*fig.* 33), construire les tangentes en trois de ces

Fig. 33.



points, A, B, C; soient P et Q les points où se rencontrent ces tangentes en A et B, B et C, respectivement.

D'après le raisonnement fait pour établir une des propositions du n° IV, Chap. II, PM qui unit le point P

Hosted by Google

où se coupent deux tangentes au milieu M de la corde des contacts AB est le diamètre de la courbe conjuguée de la direction AB; PM va donc passer par le centre, et il en est de même de QN, N étant le milieu de BC.

Si les deux droites PM, QN sont parallèles la courbe sera une parabole; dans le cas contraire, leur point commun O définira le centre de la courbe, et en menant par le point O, OP_1 parallèle à AB, et OQ_1 parallèle à BC, on aura deux systèmes de diamètres conjugués, en direction; ces deux couples de rayons associés déterminent l'involution du système des diamètres conjugués dont on cherchera les rayons doubles.

Si les rayons doubles sont réels, la courbe sera une hyperbole dont ces rayons seront les asymptotes; on pourra alors construire deux diamètres conjugués faisant un angle donné et en conséquence les axes, d'après ce qui a été dit au n° XIV, Chap. I; quant aux sommets, ce sont les intersections de la courbe et de l'un des axes qu'on peut construire d'après le n°s XV, Chap. I.

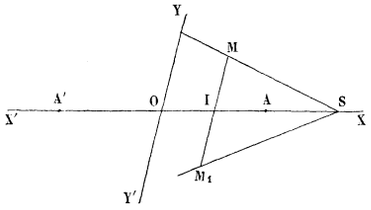
Si les rayons doubles n'existent pas, la courbe est une ellipse; on pourra construire les directions des axes, ou de deux diamètres conjugués faisant un angle donné, en conséquence des n^os V et VI, Chap. I.

Connaissant le centre, deux diamètres conjugués en direction, un point de la courbe, ainsi que la tangente en ce point, on peut déterminer les longueurs de ces diamètres au moyen de la proposition suivante :

Soient OX, OY deux diamètres conjugués, M un point de la courbe, et MS la tangente en M rencontrant OX en S (*fig.* 34); si nous menons MI parallèle à OY, que nous la prolongions de la longueur IM_1 égale à IM, et que nous tracions la droite M_1S, cette droite sera la tangente à la courbe en M_1, et S sera le pôle de MM_1 par rapport à la conique. Dès lors, si A et A′ sont les

extrémités du diamètre dirigé suivant OX, les quatre points A, A′, S, I forment une division harmonique; il

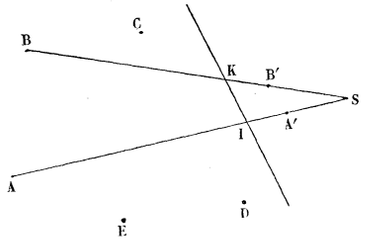
Fig. 34.



en résulte que : $\overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2 = OI \times OS$; on aura donc les points A et A′ en construisant une moyenne proportionnelle entre OI et OS.

Supposons actuellement qu'on veuille mener deux tangentes à la conique dont on donne cinq points, A, B, C, D, E, par un point S de son plan (*fig.* 35). Nous construirons les droites SA, SB, et nous déterminerons leurs seconds points communs A′, B′, avec la courbe; puis nous construirons les points I et K conju-

Fig. 35.



gués harmoniques de S par rapport à A et A′, B et B′, respectivement; la droite IK sera la polaire de S par rapport à la conique et la coupera aux points de contact des tangentes cherchées. On déterminera ces points

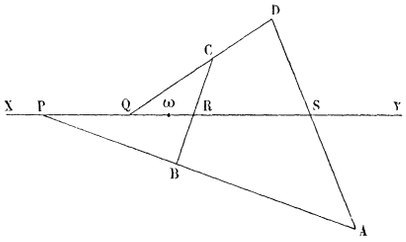
Hosted by Google

d'après la construction déduite du théorème établi au n° VI, Chap. II, et la question sera résolue.

Nous avons supposé les cinq points situés à distance finie : examinons les cas particuliers où un ou deux de ces points passent à l'infini dans des directions données :

1° *Un seul des points, soit* E, *passe à l'infini dans la direction* XY (*fig.* 36).

Fig. 36.

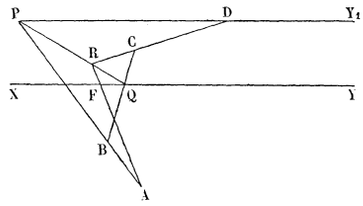


Desargues. — Si nous considérons le quadrilatère inscrit ABCD, le point conjugué de E, qu'on peut considérer comme situé à l'infini sur XY, dans l'involution déterminée par les couples de points P et Q, R et S, où les côtés opposés du quadrilatère rencontrent XY, est le point central ω de cette involution; on peut déterminer ω et l'on rentre dans la première hypothèse.

Pascal. — Supposons les cinq points donnés : A, B, C, D, E; E à l'infini sur DY′ (*fig.* 37). Menons arbitrairement AR par le point A, et proposons-nous de construire son second point commun avec la courbe, soit F. Dans l'hexagone inscrit ABCDEF, les couples de côtés opposés AB et DE (ou DY_1), AR et DC, déterminent la droite de Pascal, par leurs points communs P et R; l'intersection de PR avec BC donne le point Q; le point F

est déterminé par l'intersection de XY (ou EF), menée par Q parallèle à DY_1 avec AR. Comme dans la con-

Fig. 37.

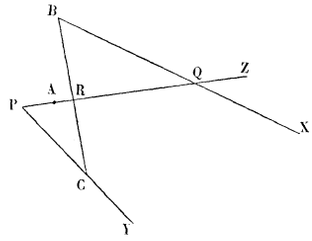


struction précédente, on rentre dans la première hypothèse. Dans ce cas, la courbe peut être une parabole ou une hyperbole.

2° *Deux des points passent à l'infini dans des directions différentes* BX, CY (*fig.* 38).

Desargues. — Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés, D et E étant situés à l'infini dans les directions BX, CY respectivement (*fig.* 38). Considérons le quadri-

Fig. 38.



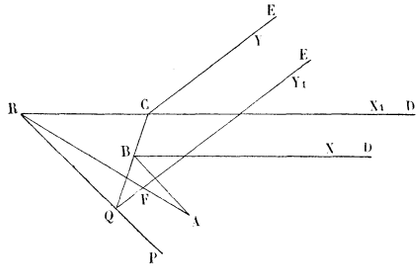
latère inscrit dont les côtés sont BC, BX, CY, et la droite DE située à l'infini. Menons par le point A une sécante quelconque AZ : son second point commun avec la courbe sera conjugué de A dans l'involution déterminée par les points P et Q et dont R est le centre, puisque son conjugué S est à l'infini sur DE.

Hosted by Google

Ce second point est facile à déterminer et situé à distance finie; en menant une seconde sécante dans une direction différente, on déterminera un cinquième point à distance finie et l'on rentrera dans la première hypothèse.

Pascal. — Soient les cinq points donnés A, B, C, D, E; D et E à l'infini dans les directions BX, CY (*fig.* 39); menons arbitrairement AR par le point A, et construisons son second point commun, F, avec la courbe. Dans

Fig. 39.



l'hexagone inscrit ABCDEF, les côtés opposés AB et DE, qui est à l'infini, se coupent au point P situé à l'infini sur AB; les côtés opposés AR et DC (ou CX_1, menée par C parallèle à BX), se coupent en R; la droite de Pascal sera donc la parallèle à AB menée par le point R qui est connu. L'intersection, Q, de cette droite avec BC est un point de EF; menant par ce point, Q, une parallèle à CY, soit QY_1, l'intersection de cette droite avec AR fait connaître le point F. On aura ainsi déterminé un quatrième point F à distance finie; on en construira un cinquième d'une manière analogue, et l'on rentrera dans la première hypothèse.

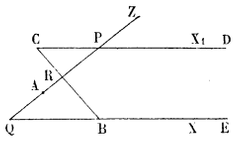
La courbe ne peut, dans ce cas, être qu'une hyperbole.

Hosted by Google

3° *Deux points passent à l'infini dans une même direction donnée.*

Desargues. — Soient A, B, C les trois points à distance finie, D et E à l'infini dans les directions CX_1, BX, qui sont parallèles (*fig.* 40).

Fig. 40.



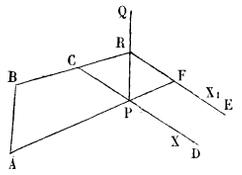
Considérons le quadrilatère inscrit BCDE, et menons par le point A une transversale quelconque AZ; son second point de rencontre avec la courbe sera le conjugué de A, dans l'involution déterminée par le couple de points P, Q, et le point R qui en est le centre, puisque son conjugué est à l'infini sur DE. On pourra facilement construire ce point situé à distance finie, et en construire de même un cinquième; on rentrera ainsi dans la première hypothèse. Dans ce cas, la conique ne peut être qu'une parabole.

Pascal. — Supposons les points A, B, C, D, E, F, A, où F est inconnu, D et E à l'infini dans les directions CX, FX_1, qui sont parallèles (*fig.* 41), unis deux à deux par des droites dans l'ordre où ils sont écrits. Menons par A la droite AF dans une direction arbitraire et cherchons son second point de rencontre F avec la courbe; les côtés opposés AF, CD se coupent en P; les côtés opposés consécutifs AB, DE se coupent à l'infini sur AB; la droite de Pascal est donc la parallèle PQ à AB menée par le point P, ce qui permet de la construire; les côtés opposés BC, FE vont concourir sur

Hosted by Google

PQ en R, déterminé par la rencontre de PQ avec BC. Menons par R la parallèle RX_1 à CX; son intersection avec AP détermine le point F. On trouverait, en me-

Fig. 41.



nant par A une droite dans une direction différente, un cinquième point, situé comme F à distance finie, et l'on rentrerait dans la première hypothèse.

Conséquences importantes. — 1° Quand on connaît cinq points d'une conique, tous les autres points peuvent être construits au moyen de l'un des théorèmes de Desargues ou de Pascal. Une droite passant par un des points donnés ne pouvant rencontrer la conique qu'en un autre point, cette courbe est absolument déterminée par cinq de ses points. En d'autres termes, *si deux coniques ont cinq points communs, elles se confondent.*

2° Une conique étant définie par cinq points, la même conique le sera par quatre de ces points et par un sixième point fourni par l'un des théorèmes de Desargues ou de Pascal; ou par quatre de ces points et la tangente en un de ces points, ou encore par trois de ces points et les tangentes en deux de ces points.

Cette substitution d'un élément point à un autre pouvant être réitérée un nombre de fois quelconque, il en résulte que : *si l'on donne cinq points, qu'on détermine consécutivement de nouveaux points par l'application de l'un des théorèmes de Desargues ou de*

Hosted by Google

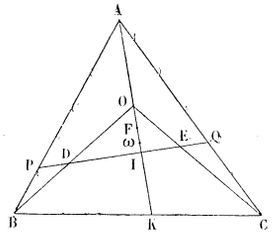
Pascal, comme si les cinq premiers appartenaient à une conique; si en plus on peut trouver une conique passant par les cinq derniers, distincts ou confondus par couples, cette conique passera également par les cinq premiers.

XIII. *Par cinq points situés dans un plan, et tels qu'il n'y en ait pas plus de deux en ligne droite, on peut toujours faire passer une conique.*

Remarquons d'abord que, si les cinq points donnés ne sont pas les sommets d'un pentagone convexe, on peut toujours par l'application, réitérée si cela est nécessaire, du théorème de Desargues, trouver cinq points sommets d'un pentagone convexe, et tels que, si l'on peut faire passer une conique par ces cinq points, elle passera par les cinq premiers.

Si les cinq points ne sont pas sommets d'un pentagone convexe, il ne peut se présenter que deux cas : ou deux d'entre eux sont intérieurs au triangle dont les trois autres sont les sommets, ou un seul d'entre eux est situé à l'intérieur d'un quadrilatère convexe dont les quatre autres sont sommets.

Fig. 42.



Examinons le premier cas. Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés (*fig.* 42). D et E étant à l'intérieur

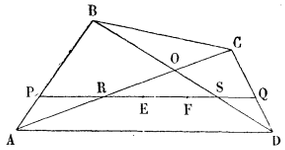
du triangle dont A, B, C sont les trois sommets. La droite DE ne peut passer par aucun des trois sommets et doit, en conséquence, rencontrer le périmètre en deux points P et Q; les côtés opposés BD, CE du quadrilatère convexe BDEC vont se couper en O, à l'intérieur du triangle. Dès lors la droite AO rencontre le côté BC en K, situé entre B et C, et DE en I, situé entre D et E. Le point O est un des points doubles de l'involution déterminée sur AK par ses points de rencontre avec les côtés opposés du quadrilatère BDEC; il en résulte que le centre ω de cette involution est extérieur au segment IK; de plus, il est situé entre O et I, car, s'il était sur OA ou sur son prolongement, $\overline{\omega O}^2$ serait inférieur à $\omega I \times \omega K$, et, s'il était situé sur le prolongement de AK, $\overline{\omega O}^2$ serait, au contraire, supérieur au même produit. Le centre ω de l'involution dont on vient de parler, étant situé entre I et O, le point A et son conjugué F sont situés d'un même côté de ω, et le segment dont ils sont extrémités comprend le point double O. Le point F étant situé entre O et ω, le pentagone BDFEC est convexe, et une conique passant par ses sommets passera également par le point A.

Occupons-nous maintenant du deuxième cas. Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés, E étant situé à l'intérieur du quadrilatère convexe ABCD (*fig.* 43). Construisons les diagonales AC, BD : le point E tombera à l'intérieur d'un des triangles AOD, BOC, DOC, AOB, soit du triangle AOD; considérons le quadrilatère ACDB, et menons la transversale PEQ, parallèle à AD, rencontrant les couples de côtés opposés AB et CD, AC et BD, en P et Q, R et S, respectivement. Le segment RS étant intérieur au segment PQ, dans l'involution que déterminent les extrémités de ces segments, la puissance

Hosted by Google

de cette involution est positive, et, comme le point E est intérieur au segment RS, il en est de même de son con-

Fig. 43.

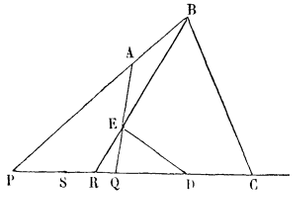


jugué. Dès lors, les cinq points A, B, D, E, F, qu'on peut substituer aux cinq points A, B, C, D, E, rentrent dans le cas précédent.

Établissons actuellement la proposition suivante : *Si l'on considère un pentagone convexe, et qu'on applique à un de ses sommets la construction de la tangente définie par le théorème de Desargues, cette droite laissera les quatre autres sommets d'un même côté.*

Soit le pentagone convexe ABCDE (*fig.* 44), appliquons la construction de la tangente au sommet A.

Fig. 44.



Dans ce but, imaginons le quadrilatère ayant pour côtés opposés AB et AE, BE et la tangente inconnue en A; coupons la figure par la droite DC, rencontrant AB et AE en P et Q, BE et la tangente inconnue en A, en R et S. Le pentagone étant convexe, les points P et Q sont

Hosted by Google

extérieurs au segment DC, d'un même côté ou de part et d'autre; il en résulte que la puissance de l'involution déterminée par les deux couples de points D et C, P et Q, est positive. Dans le premier cas, qui est celui de la figure, le point R est compris entre les points P et Q; donc il en est de même de son conjugué S, et la tangente ne pouvant se mouvoir que dans l'intérieur de l'angle PAQ laisse les quatre points B, E, D, C d'un même côté; dans le second les points R et S sont extérieurs au segment PQ, et la conséquence est la même.

D'après cela, pour montrer qu'on peut faire passer une conique par cinq points quelconques, dont trois ne sont pas en ligne droite, il suffit d'établir la proposition pour cinq points sommets d'un pentagone convexe, et, d'après la dernière proposition établie, en construisant les tangentes en deux des sommets de ce pentagone convexe, l'angle de ces tangentes qui renferme la corde unissant les points de contact renfermera aussi les trois autres sommets.

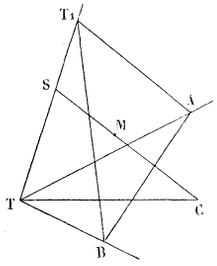
Il suffit donc de montrer qu'on peut *construire une conique tangente à deux droites données en deux points donnés sur ces droites et passant par un troisième point situé dans l'angle de ces tangentes qui renferme le segment de droite unissant les points de contact.*

Pour résoudre la question, soient AT, BT les deux tangentes données, A et B étant les points de contact, C le troisième point situé dans l'angle des tangentes renfermant AB (*fig.* 45). Par les points A et B, et dans un plan autre que le plan ABC, faisons passer un cercle quelconque et menons en A et B les tangentes AT_1, BT_1 à ce cercle. Le plan CTT_1 rencontre AB entre A et B; dès lors il rencontre le cercle en deux points : soit M un de ces points; joignons CM par une ligne droite et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre avec TT_1 en S. Si

Hosted by Google

nous prenons S pour sommet d'un cône ayant pour directrice le cercle, le cône sera tangent aux deux plans TAT_1, TBT_1, et il sera coupé par le plan TAB suivant une conique tangente à AT et BT en A et B, et passant

Fig. 45.



par le point C qui est la trace de la génératrice SM sur le plan ABC; cette conique répond à la question. Comme il y a deux points M sur le cercle, le même cercle donne deux solutions.

Construction de coniques définies par cinq données, points ou tangentes réels, situés à distance finie, d'après les théorèmes précédents.

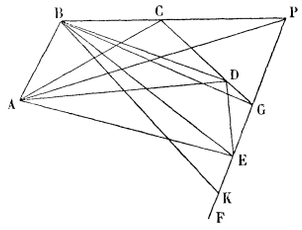
XIV. Le premier de ces problèmes, construire une conique, connaissant cinq de ses points, a été résolu avec détail dans le numéro qui précède de deux rangs, et nous avons montré dans le précédent que par cinq points, tels qu'il n'y en ait pas plus de deux en ligne droite, on peut toujours faire passer une conique. Nous allons nous occuper actuellement de la construction d'une conique dont on donne cinq autres éléments, points ou tangentes :

1° *Construire une conique, connaissant cinq de ses tangentes.*

Hosted by Google

Théorème corrélatif de celui de Desargues. — Soient AB, BC, CD, DE, EF les cinq tangentes données (*fig.* 46); considérons les quatre dernières comme formant un quadrilatère circonscrit dont les quatre sommets sont C, D, E et P, où se rencontrent BC et EF. Prenons un point quelconque A sur la première et unissons-le par des lignes droites aux sommets D, P, C, E du qua-

Fig. 46.



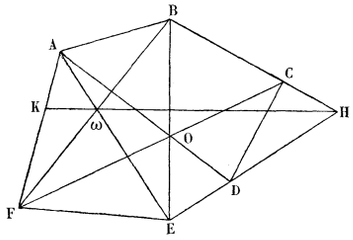
drilatère; la seconde tangente, issue du point A, est le rayon conjugué de AB dans le faisceau en involution défini par les couples des rayons AC et AE, AD et AP; en construisant ce rayon, on aura une sixième tangente et l'on pourra ainsi s'en procurer autant qu'on voudra.

Considérons une des cinq tangentes données EF, et proposons-nous de trouver son point de contact, soit K; CD, DE, EK, KF peuvent être considérées comme formant un quadrilatère circonscrit dont les sommets sont D, E, K et G, intersection de CD et FK; si nous unissons le point B à ces sommets par des lignes droites, BK sera le rayon conjugué de BD dans le faisceau en involution déterminé par le couple des rayons BA, BC qui sont tangents, et par le couple BE, BG qui unissent le point B à deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit; on construira le rayon BK dont l'intersection avec EF donnera le point de contact K.

Hosted by Google

Brianchon. — Soient AB, BC, CD, DE, EF les cinq tangentes données (*fig.* 47); prenons arbitrairement le point A sur la tangente AB; A, B, C, D, E peuvent être considérés comme cinq sommets d'un hexagone circonscrit, dont F serait le sixième; les droites AD,

Fig. 47.



BE, qui sont deux diagonales unissant deux sommets opposés, déterminent le point O par leur intersection; la troisième diagonale passe par C et O et détermine le sommet F et la tangente AF par sa rencontre avec EF.

Considérons une tangente, soit AF qu'on vient de construire, et cherchons son point de contact K. Les six points A, B, H, E, F, et K, qui est inconnu, peuvent être pris pour six sommets d'un hexagone circonscrit; construisons les diagonales AE, BF unissant deux sommets opposés, leur intersection détermine le point ω; la troisième diagonale passe par H et ω et va couper AF au point cherché K.

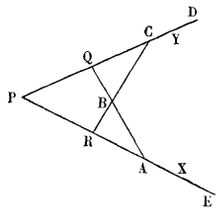
L'une des cinq tangentes est donnée à l'infini. (La courbe, dans ce cas, ne peut être qu'une parabole.)

Les constructions précédentes continuent à s'appliquer en considérant deux des sommets du pentagone formé par les cinq tangentes données; soient D et E comme situés à l'infini sur les côtés extérieurs PX, PY

Hosted by Google

du quadrilatère complet, dont les quatre côtés sont les tangentes, restant à distance finie (*fig.* 48).

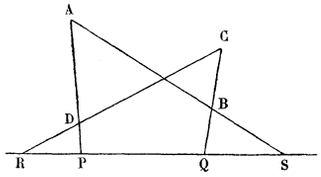
Fig. 48.



2° *Construire une conique, connaissant quatre de ses points et une de ses tangentes.*

Desargues. — Considérons le quadrilatère inscrit ABCD, dont les quatre sommets sont les quatre points donnés, et soit RS la tangente donnée (*fig.* 49). Les couples de points P et Q, R et S, où la tangente est rencontrée par les couples des côtés opposés du quadrilatère, déterminent une involution dont font partie les points de

Fig. 49.



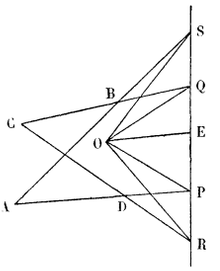
rencontre de la tangente et de la conique, et, comme ces points se réduisent à un, puisque la droite est tangente, le point de contact est l'un des points doubles de cette involution. On pourra, d'après cela, déterminer le point de contact et l'on est ramené au cas où l'on donne cinq points; comme l'involution a deux points doubles, il y a deux solutions.

Hosted by Google

La tangente peut être donnée à l'infini. (La courbe est alors une parabole.)

Soient encore les quatre points A, B, C, D (*fig.* 50), et supposons d'abord la tangente PQ située à distance finie; si E est l'un des points de contact de la courbe,

Fig. 50.



il sera l'un des points doubles de l'involution déterminée par les couples de points P et Q, R et S. Unissant un point quelconque, O, du plan aux cinq points P, Q, R, S, E, le faisceau ainsi formé sera en involution et OE en sera un rayon double. Si PQ passe à l'infini, les quatre premiers rayons deviendront parallèles aux côtés du quadrilatère qu'ils rencontrent en P, Q, R, S, respectivement, et OE sera toujours l'un des rayons doubles du faisceau déterminé par ces parallèles; mais, comme OE rencontre la courbe en un second point à l'infini, il est parallèle à un des diamètres de la courbe et détermine cette direction; on est alors ramené au cas où l'on donne cinq points dont l'un est à l'infini dans une direction donnée. Comme le faisceau OPQRS a deux rayons doubles, il y a deux solutions.

La tangente peut passer à l'infini en même temps que l'un des points y passe dans une direction donnée.

L'une des tangentes passant à l'infini, la courbe ne

Hosted by Google

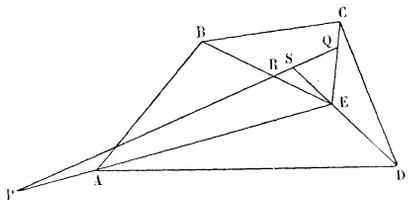
peut être qu'une parabole ; on peut alors supposer que le point et le point de contact ont passé à l'infini dans la direction donnée, et l'on est ramené au cas où l'on donne cinq points dont deux ont passé à l'infini dans la même direction donnée.

Il n'y a pas de modification sensible à la construction générale, si *deux des quatre points passent à l'infini dans des directions données, la tangente restant à distance finie.*

3° *Construire une conique dont on donne quatre tangentes et un point.*

Théorème corrélatif de celui de Desargues. — Soient AB, BC, CD, DA les quatre tangentes données, E le point donné (*fig.* 51); unissons par des lignes droites le point E aux quatre sommets du quadrilatère circonscrit. Si nous coupons la figure par une transversale

Fig. 51.



quelconque PS, les couples de points de rencontre de cette droite avec les rayons EA et EC, EB et ED déterminent une involution dont font partie les points de rencontre de la même droite avec les deux tangentes issues du point E; mais, comme le point E appartient à la courbe, les deux tangentes qui en sont issues se confondent, et leurs points communs avec PS se réduisent à un qui est le point double de l'involution déterminée

par P et Q, R et S. On déterminera donc un de ces points doubles, en l'unissant au point E par une droite; on aura une cinquième tangente et l'on sera ramené à un cas précédent. Comme l'involution a deux points doubles, il y a deux solutions.

La même construction s'applique encore *si le point* E *se transporte à l'infini dans une direction donnée.* Les quatre rayons EA, EB, EC, ED, devenant parallèles, la courbe correspondante peut être une hyperbole ou une parabole : dans le premier cas, la cinquième tangente sera une asymptote; dans le deuxième, cette cinquième tangente passe à l'infini ; la courbe sera une parabole dont on connaît quatre tangentes ; sa construction rentre dans un cas précédent.

Si *une des tangentes* AD *passe à l'infini, le point* E *restant à distance finie,* la courbe ne peut être qu'une parabole, la construction continue à s'appliquer, deux des sommets A, D du quadrilatère circonscrit passant à l'infini dans les directions BA, CD.

Enfin, si *une des tangentes,* AD *par exemple, passe à l'infini, et que le point* E *passe également à l'infini dans une direction donnée,* la courbe ne peut être qu'une parabole; mais la construction ne s'applique plus, la cinquième tangente qu'elle détermine passant elle-même à l'infini. On peut alors traiter directement la question qui se réduit à *construire une parabole dont on donne trois tangentes et la direction des diamètres.*

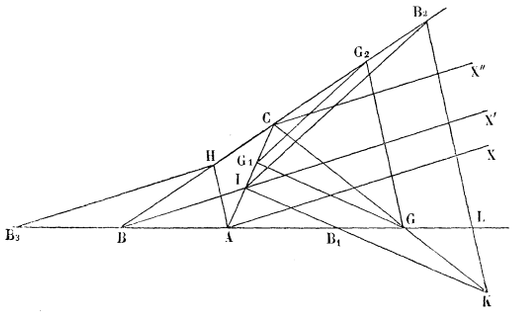
Soient AB, BC, AC les trois tangentes (*fig.* 52), AX, BX′, CX″, les parallèles aux diamètres menées par les points A, B, C; prenons pour inconnues les points de contact.

La droite qui unit deux d'entre eux, ceux qui se trouvent sur les tangentes BA, AC par exemple, est divisée

Hosted by Google

par AX en deux parties égales; dès lors sa direction est déterminée : il suffira pour l'obtenir de prendre sur BA la longueur $AB_1 = AB$ et de joindre B_1I, I étant le

Fig. 52.



point de rencontre de BX′ avec AC; B_1I est parallèle aux cordes divisées par AX en deux parties égales.

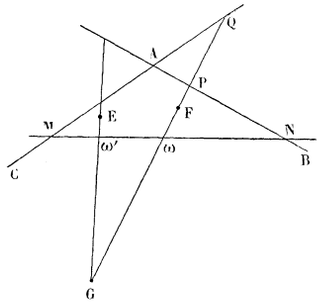
On déterminera d'une manière analogue les directions des deux autres cordes de contact respectivement parallèles à IB_2, AH ou B_2L. La question se ramène alors à construire un triangle dont les côtés soient parallèles à IB_1, IB_2, B_2L, et dont les sommets reposent sur AB, BC, AC; les sommets de ce triangle seront les points de contact cherchés. Pour construire ce triangle, il suffit de prolonger IB_1, B_2L, jusqu'à leur rencontre en K, d'unir le point K au point C par une ligne droite coupant AB en G, puis de mener par ce point G les droites GG_1, GG_2, respectivement parallèles à IB_1, B_2L. Le triangle GG_1G_2 remplit les conditions de l'énoncé : le problème n'a qu'une solution.

4° *Construire une conique dont on donne trois points et deux tangentes.*

Desargues. — Soient AB, AC les deux tangentes

données, E, F, G les trois points donnés (*fig.* 53) : considérons la droite MN qui unit les points de contact des deux tangentes AB, AC, comme formant avec elles, en la prenant doublement, un quadrilatère inscrit dans

Fig. 53.



la conique. Les points G et F, qui appartiennent à la courbe, et les points P et Q où la droite GF rencontre les côtés opposés AB, AC du quadrilatère inscrit déterminent une involution dont le point ω, où GF rencontre MN, est un des points doubles. En construisant les points doubles de cette involution déterminée, on aura deux points, tels que ω, ω_1, dont l'un se trouvera sur MN. Répétant le même raisonnement relativement à la transversale GE, on aura deux nouveaux points ω′, ω'_1, dont l'un appartiendra à la droite MN. Cette droite peut donc avoir quatre positions déterminées, en associant deux à deux les points ω, ω_1 avec les points ω′, ω'_1 ; à chaque position de la droite correspond une conique dont la construction se ramène à un cas précédent : la question a donc quatre solutions.

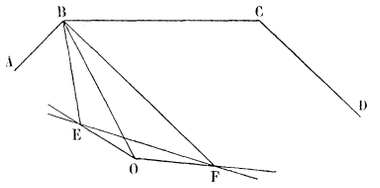
Dans les cas où quelques-uns des éléments donnés se transporteraient à l'infini, on raisonnerait comme dans les cas prédents.

Hosted by Google

5° *Construire une conique dont on donne trois tangentes et deux points.*

Théorème corrélatif de celui de Desargues. — Soient AB, BC, CD les trois tangentes données, E, F les deux points donnés (*fig.* 54); considérons les deux

Fig. 54.



tangentes réduites à une en E, et les deux tangentes réduites à une en F, comme formant un quadrilatère circonscrit à la conique, ayant deux sommets opposés en E et F, et les deux autres sommets opposés confondus au point O où elles se coupent.

Les tangentes BA, BC, les deux rayons BE, BF déterminent un faisceau en involution dont BO est un rayon double; donc, en construisant les rayons doubles de cette involution, déterminée par les quatre rayons connus, on aura deux droites BO, BO_1, dont l'une doit passer par le point de concours des tangentes en E et F.

En répétant le même raisonnement sur le faisceau déterminé par CB et CD, CE et CF, on obtiendra deux nouvelles droites issues de C′ et dont l'une passera par le point O. En associant chacune des deux droites issues de B, et telles que BO, avec chacune de celles qui sont issues de C, dans les mêmes conditions, on obtiendra quatre points qui peuvent appartenir chacun à deux tangentes en E et F.

On pourra ainsi construire quatre systèmes de deux

Hosted by Google

tangentes qui, associés chacun aux trois tangentes données, détermineront quatre coniques remplissant les conditions de l'énoncé.

Si un ou deux des éléments donnés passaient à l'infini, on raisonnerait comme dans les cas précédents.

XV. *Étant données deux coniques, chacune par cinq points,* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *pour la première,* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 *pour la deuxième, et admettant que ces deux coniques ont quatre points communs inconnus, on propose de construire une troisième conique passant par ces quatre points, et par un cinquième point donné* C.

Par le point C menons une transversale quelconque; d'après le théorème du n° VI, Chap. II, on pourra construire les deux points M et M_1, où elle rencontre la première conique, et les points N et N_1 où elle coupe la seconde; le point conjugué de C dans l'involution déterminée par les couples de points M et M_1, N et N_1, appartient à la troisième conique, d'après la généralisation du théorème de Desargues, n° VIII, Chap. II, et peut être construit.

On pourra déterminer ainsi autant de points qu'on voudra de la troisième conique, et la question est résolue.

XVI. *Deux coniques ont deux points communs* A_1, A_2 *donnés; en outre on donne trois autres points de chacune d elles* A_3, A_4, A_5 *pour la première,* A'_1, A'_2, A'_3 *pour la deuxième : on demande de construire leurs deux autres points communs.*

Coupant la figure par une transversale, d'après le théorème du n° VI, Chap. II, on pourra construire les

Hosted by Google

points M et M_1, N et N_1, où elle rencontre les deux coniques qui sont chacune définies par cinq points. Si P est le point où la même droite rencontre la droite $A_1 A_2$, le point conjugué Q dans l'involution déterminée par les couples de points M et M_1, N et N_1 appartient à la droite qui unit les deux points inconnus (*Gén. du th. de Desargues,* n° VIII, Chap. II).

On pourra construire ce point Q, et de la même manière déterminer un second point Q_1 de la droite unissant les points inconnus. Il ne restera plus qu'à trouver les points communs de la droite QQ_1 avec l'une des coniques données, ce qui se fera par l'application du théorème établi au n° VI, Chap. II.

XVII. *Une section plane d'un cône ayant pour directrice une conique est aussi une section conique.*

En effet, si l'on prend le sommet du cône comme point de vue, la section peut être considérée comme une perspective de la directrice.

Comme les théorèmes de Desargues et de Pascal sont projectifs et s'appliquent à la directrice, on pourra construire tous les points de cette ligne par leur application et au moyen de cinq d'entre eux; mais on pourra aussi construire tous les points de la section par l'application des mêmes théorèmes aux points correspondants de cette section. Il en résulte que tous les points de la section appartiennent à la conique qui passe par les cinq premiers et qui est déterminée, et qu'en consequence cette section est une conique.

Hosted by Google

CHAPITRE III.

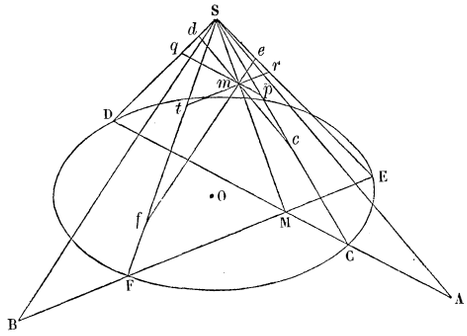
THÉORÈMES DIVERS ET APPLICATIONS.

Théorème de Newton et conséquences.

I. Théorème de Newton. — *Si par un point du plan d'une section conique on mène deux sécantes parallèles à deux directions données, parallèles à ce plan, le rapport du produit des deux segments déterminés par la courbe sur l'une des sécantes au produit des segments déterminés sur l'autre est un nombre constant indépendant de la position du point.*

Soient O le cercle directeur, S le sommet du cône (*fig.* 55); menons par le sommet du cône les deux

Fig. 55.



droites SA, SB, respectivement parallèles aux deux directions données, et limitées en A et B au plan de la

base circulaire, le plan ASB sera parallèle au plan sécant.

Par le point m, pris arbitrairement dans le plan sécant, menons dc, ef respectivement parallèles à SA, SB, puis faisons passer un plan par SA et dc, et un autre par SB et ef; le premier de ces plans coupera le cône suivant les génératrices SC, SD, le deuxième suivant SE, SF; ils se couperont entre eux suivant la droite SM.

Traçons ensuite pmq parallèle à DC et rmt parallèle à EF. De la similitude des triangles mdq, DSA, on déduit

$$\frac{md}{mq} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}},$$

et de celle des triangles Smq, SMD :

$$\frac{mq}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}};$$

d'où, multipliant membre à membre,

$$\frac{md}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AD}} \times \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

On trouve de même, par la considération des couples de triangles semblables, mpc, CSA, Smp, CSM :

$$\frac{mc}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

En multipliant membre à membre les deux dernières :

$$\frac{mc \times md}{\mathrm{MC} \times \mathrm{MD}} = \frac{\overline{\mathrm{SA}}^2}{\mathrm{AC} \times \mathrm{AD}} \times \left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

Répétant des calculs analogues sur les triangles semblables : Smt, SMF, et mtf, SBF; puis sur les deux autres couples de triangles semblables : Smr, SME, et

Hosted by Google

mer, BSE, on en déduit

$$\frac{me \times mf}{\mathrm{ME} \times \mathrm{MF}} = \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\mathrm{BE} \times \mathrm{BF}} \times \left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

Divisant membre à membre les deux dernières égalités, en remarquant que, d'après les propriétés des sécantes au cercle, $\mathrm{MC} \times \mathrm{MD} = \mathrm{ME} \times \mathrm{MF}$, on trouve

$$\frac{mc \times md}{me \times mf} = \left(\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SB}}\right)^2 : \frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{AD}}{\mathrm{BE} \times \mathrm{BF}}.$$

Le second membre est constant et le théorème est démontré.

La *fig.* 55 suppose les points A et B en dehors du cercle directeur, ce qui arrive toujours quand la conique est une ellipse ou une parabole, exceptant dans ce dernier cas celui où l'une des directions données serait parallèle aux diamètres, et que nous examinerons à part à la fin du présent numéro.

Dans le cas de l'hyperbole, l'un ou les deux points A ou B peuvent être intérieurs au cercle directeur, si les directions SA, SB correspondent à des cordes rencontrant les deux branches; la démonstration se fait de la même manière et conduit au même résultat.

Conservons dans la *fig.* 56 les notations de la *fig.* 55, et aussi les mêmes hypothèses, sauf que SA est une direction intérieure au lieu d'être extérieure comme dans la figure précédente.

Des deux triangles mdq, DSA, sont toujours semblables et donnent

$$\frac{md}{mq} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}};$$

il en est de même des triangles $\mathrm{S}mq$, SDM, d'où l'on déduit

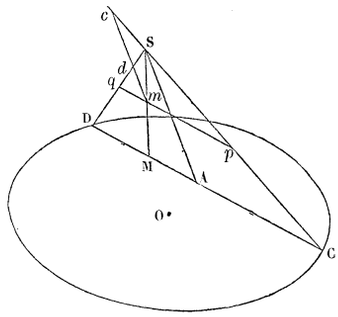
$$\frac{mq}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

Hosted by Google

Multipliant membre à membre,

$$\frac{md}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AD}} \times \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

Fig. 56.



Considérons encore les deux couples de triangles semblables, *mpc*, ASC, et S*mp*, SMC, on en tire

$$\frac{mc}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

Multipliant membre à membre les deux dernières égalités, on a

$$\frac{md \times mc}{\mathrm{MD} \times \mathrm{MC}} = \frac{\overline{\mathrm{SA}}^2}{\mathrm{AD} \times \mathrm{AC}} \times \left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

La démonstration s'achève comme dans le cas précédent, que la direction SB soit intérieure ou extérieure.

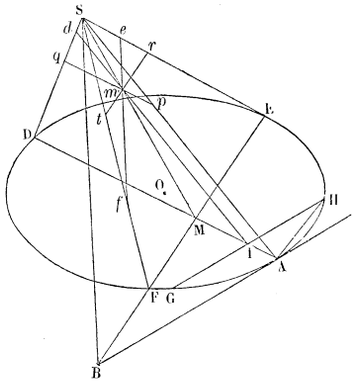
Il nous reste à examiner ce qui advient dans le cas de la parabole, et si l'une des directions, soit SA, est parallèle aux diamètres; dans ce cas SA est située sur la surface du cône, et SB est contenue dans le plan tangent suivant SA (*fig.* 57).

Le plan de la parabole est parallèle au plan tangent BSA, et coupe le plan de la directrice suivant GH paral-

Hosted by Google

lèle à AB. Par un point m du plan de la section menons les droites dmI, emf, respectivement parallèles à SA, SB; puis encore rmt, pmq, respectivement parallèles

Fig. 57.



aux traces BFE, DA des plans SBm, SAm sur le plan de la directrice.

Ces deux plans SBm, SAm coupent le cône suivant les couples de génératrices SE, SF, et SA, SD; de plus ils se coupent entre eux suivant SmM.

La trace I de la droite dmI, intersection du plan de la courbe et du plan SAm, sur le plan de la directrice, se déplace sur la trace GH du plan de la section sur le plan du cercle de base.

De la similitude des triangles dmq, SAD, on déduit

$$\frac{md}{mq} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}};$$

de celle des triangles Sqm, SDM, on tire

$$\frac{mq}{\mathrm{DM}} = \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}};$$

Hosted by Google

multipliant membre à membre, on a

$$\frac{md}{MD} = \frac{SA}{AD} \times \frac{Sm}{SM}.$$

De la considération des triangles semblables Smp, SMA, et observant que $mp = AI$, comme côtés opposés d'un parallélogramme, on déduit

$$\frac{mp}{MA} = \frac{AI}{MA} = \frac{Sm}{SM};$$

multipliant membre à membre,

$$\frac{md \times AI}{MD \times MA} = \frac{SA}{AD} \times \left(\frac{Sm}{SM}\right)^2.$$

On trouve, comme dans les cas précédents et par la considération des mêmes triangles,

$$\frac{me \times mf}{ME \times MF} = \frac{\overline{SB}^2}{BF \times BE} \times \left(\frac{Sm}{SM}\right)^2.$$

Divisant membre à membre et observant que

$$MD \times MA = ME \times MF,$$

on a

$$\frac{me \times mf}{md \times AI} = \frac{\overline{SB}^2}{BE \times BF} \times \frac{AD}{SA}$$

ou

$$\frac{me \times mf}{md} = \frac{\overline{SB}^2}{BE \times BF} \times \frac{AD \times AI}{SA}.$$

Or le produit $AD \times AI$ est constant et égal à $\overline{AH}^2$; le second membre est donc constant, et l'on a

$$\frac{me \times mf}{md} = \frac{\overline{SB}^2}{BE \times BF} \times \frac{\overline{AH}^2}{SA},$$

c'est-à-dire que, *dans la parabole, le point commun*

Hosted by Google

d'une corde de direction fixe avec un diamètre partage cette corde en deux segments dont le produit est au segment du diamètre compris entre le même point et la courbe dans un rapport constant.

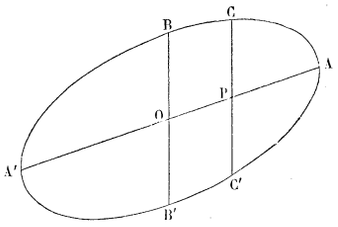
II. — Propriétés métriques des demi-cordes parallèles, ou ordonnées d'une section conique, par rapport aux segments qu'elles déterminent sur le diamètre qui les divise en parties égales. Équations des coniques à centre rapportées à deux diamètres conjugués. Équation de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Les propriétés que nous avons l'intention d'établir dans le présent numéro sont des conséquences immédiates du théorème de Newton que nous venons de démontrer.

Considérons séparément les trois courbes.

Ellipse. — Soit l'ellipse O (*fig.* 58); AA′, BB′ deux diamètres conjugués dont nous supposerons les demi-

Fig. 58.



longueurs respectivement représentées par a' et b'; CC′ une corde parallèle à BB′, et divisée en deux parties égales par son point de rencontre P avec AA′.

D'après le théorème de Newton, le rapport $\frac{PC \times PC'}{PA \times PA'}$

conserve une même valeur constante quand le point P se déplace sur AA′; en conséquence, on a, pour tous les points de la courbe,

$$\frac{PC \times PC'}{PA \times PA'} = \frac{OB \times OB'}{OA \times OA'},$$

ou

$$\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

Donc : *le carré d'une demi-corde, ou ordonnée, qui se déplace en conservant sa direction, est au produit des segments qu'elle détermine sur le diamètre conjugué dans un rapport constant.*

Si l'on désigne, d'une façon générale, cette ordonnée par y, et par x le nombre positif ou négatif représentant OP, l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{y^2}{(a'-x)(a'+x)} = \frac{b'^2}{a'^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1;$$

c'est l'équation cartésienne de la courbe rapportée aux deux diamètres conjugués AA′, BB′.

Parabole. — Soit une parabole dont le diamètre AX divise en parties égales les cordes telles que CC′, parallèles à la tangente AY (*fig.* 59); d'après la fin du numéro précédent, on sait que, lorsque la corde CC′ se déplace parallèlement à elle-même, le rapport $\frac{PC \times PC'}{AP}$ est constant; et, comme le point P où CC′ rencontre le diamètre conjugué de sa direction en est le point milieu, cette égalité peut se mettre sous la forme $\frac{\overline{CP}^2}{AP} = 2p'$, p' étant un nombre représentant une longueur fixe.

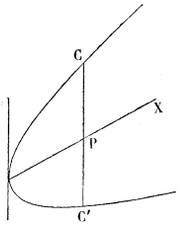
Hosted by Google

Désignant, d'une façon générale, CP par y et AP par x, l'équation précédente, qui a lieu pour tous les points de la courbe, peut s'écrire

$$y^2 = 2p'x,$$

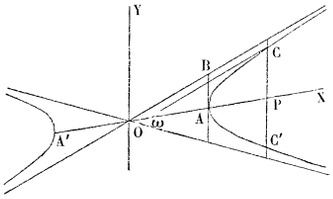
équation cartésienne de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à son extrémité.

Fig. 59.



Hyperbole. — Soient enfin l'hyperbole O (*fig.* 60), CC' une corde variable parallèle à OY, OX le diamètre

Fig. 60.



conjugué de sa direction; d'après le théorème de Newton et pour tous les points de la courbe, le rapport $\frac{PC \times PC'}{PA \times PA'}$ a une valeur constante, et il en est de même de $\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'}$, puisque $PC = PC'$.

Cherchons à déterminer la valeur de ce rapport : dans

ce but menons, par le point C, $C\omega$ parallèle à l'asymptote OB; nous avons immédiatement

$$\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'} = \frac{\overline{PC}^2}{(P\omega - \omega A)(P\omega + \omega A')}$$
$$= \frac{\left(\frac{PC}{P\omega}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega A}{P\omega}\right)\left(1 + \frac{\omega A'}{P\omega}\right)}.$$

Si le point C s'écarte indéfiniment de l'origine, la droite $C\omega$ se rapproche indéfiniment de l'asymptote, et le point ω du point O; il en résulte que ωA et $\omega A'$ restent finis, et que leurs rapports à $P\omega$ ont pour limite zéro; de plus, si nous représentons les longueurs OA, AB, par a', b' respectivement, on déduit de la similitude des triangles ωPC, OAB l'égalité

$$\frac{PC}{P\omega} = \frac{b'}{a'};$$

d'où

$$\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'} = \lim \frac{\left(\frac{PC}{P\omega}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega A}{P\omega}\right)\left(1 + \frac{\omega A'}{P\omega}\right)} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

Donc *le carré d'une demi-corde, ou ordonnée, qui se déplace en conservant sa direction, est au produit des segments qu'elle détermine sur le diamètre conjugué, que la figure suppose rencontrer réellement la courbe, dans un rapport constant.*

Si l'on représente, d'une manière générale, cette ordonnée par y et par x le nombre positif ou négatif représentant le segment OP, l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{y^2}{(x - a')(x + a')} = \frac{b'^2}{a'^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

C'est l'équation cartésienne de la courbe rapportée aux deux diamètres conjugués OX, OY.

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{x^2}{y^2 + b'^2} = \frac{a'^2}{b'^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{(y + b'\sqrt{-1})(y - b'\sqrt{-1})} = \frac{a'^2}{b'^2};$$

d'où l'on peut conclure que *le carré d'une demi-corde qui se déplace parallèlement à une direction fixe, et dont le diamètre conjugué ne rencontre pas réellement la courbe, est au produit des segments qu'elle détermine sur ce diamètre dans un rapport constant,* A CONDITION DE CONSIDÉRER LES EXTRÉMITÉS DE CE DIAMÈTRE COMME DISTANTES DU CENTRE DES LONGUEURS IMAGINAIRES REPRÉSENTÉES PAR $\pm b'\sqrt{-1}$.

III. *Construire une conique dont on donne un point réel et quatre points réels ou imaginaires définis par les couples de points où deux droites données rencontrent une ou deux coniques.*

Remarquons d'abord que, d'après le théorème établi au n° VI, Chap. II, on peut remplacer les points communs réels ou imaginaires d'une conique définie et d'une droite donnée par ceux de la même droite et d'un cercle qu'on peut construire; d'après cela, on peut considérer les quatre derniers points donnés comme situés par couples sur les deux droites données et deux cercles donnés.

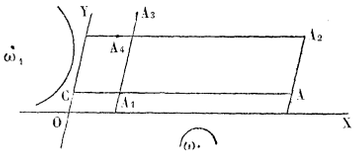
Soit donc à construire la conique passant par le point réel donné, A, et par les couples de points de rencontre

Hosted by Google

des droites données OX, OY, avec les cercles donnés ω, ω_1 respectivement (*fig.* 61).

Menons par le point A la parallèle à OX rencontrant OY en C, et soit A_1 son second point de rencontre avec la courbe; d'après le théorème de Newton, le rapport

Fig. 61.



du produit $CA \times CA_1$ à celui des segments interceptés sur OY entre le point C et les points où cette droite rencontre le cercle ω_1, ce dernier produit étant égal à la puissance, π, du point C par rapport au cercle ω_1, est égal au rapport des puissances P et P_1 du point O par rapport aux cercles ω et ω_1 respectivement.

On aura donc l'égalité

$$\frac{CA_1 \times CA}{\pi} = \frac{P}{P_1},$$

d'où l'on pourra déduire une construction du point A_1.

On pourra déterminer par une construction analogue le point A_2 où la parallèle à OY menée par A rencontre de nouveau la courbe; puis encore les seconds points de rencontre avec la courbe des parallèles menées à OY et OX par les points A_1 et A_2, soient ces points A_3 et A_4; connaissant cinq points réels de la courbe, elle est définie et peut être construite.

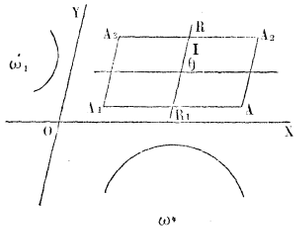
Remarque. — La construction précédente ne pourrait se terminer de la même manière s'il arrivait que les points A_3 et A_4 se confondissent; dans ce cas OX et OY seraient parallèles à deux diamètres conjugués de la courbe,

Hosted by Google

diamètres qu'on pourrait construire en menant des parallèles à OY, OX par les points milieux des cordes AA_1, AA_2; on connaitrait alors le centre et l'on pourrait construire la longueur de ces diamètres d'après le théorème de Newton, ainsi qu'il suit.

Conservons dans la *fig.* 62 les notations de la *fig.* 61, supposant A_3 et A_4 confondus en A_3, et soient R et R_1

Fig. 62.



les extrémités du diamètre parallèle à OY. On a, d'après le théorème de Newton,

$$\frac{IR \times IR_1}{IA_2 \times IA_3} = \frac{\overline{\theta R}^2 - \overline{\theta I}^2}{\overline{IA_2}^2} = \frac{P_1}{P},$$

P_1 et P étant toujours les puissances du point O par rapport aux cercles ω_1 et ω; la dernière égalité permet de construire θR et, en conséquence, les points R et R_1.

Examinons enfin *le cas où les droites données sont parallèles.*

Proposons-nous de faire passer une conique par le point réel A, et par les points imaginaires où les cercles ω, ω_1 rencontrent les droites parallèles X_1X, Y_1Y respectivement (*fig.* 63).

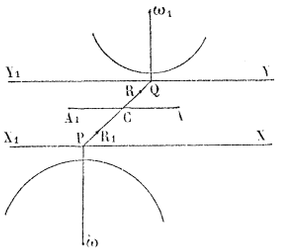
Les points milieux des cordes interceptées dans la courbe cherchée sur les droites X_1X, Y_1Y sont placés aux pieds P et Q des perpendiculaires abaissées des

Hosted by Google

centres ω, ω_1 des cercles donnés sur les deux droites données.

PQ est donc le diamètre de la courbe divisant en parties égales les cordes parallèles à X_1X; en menant par A la parallèle à X_1X et en la prolongeant au delà de son

Fig. 63.



point de rencontre C avec PQ d'une longueur $CA_1 = CA$, le point A_1 sera un nouveau point de la courbe. Désignons par R et R_1 les extrémités du diamètre PQ et par P et P_1 les puissances des points P et Q par rapport aux cercles ω, ω_1 respectivement : nous aurons, par application du théorème de Newton,

$$\frac{CR \times CR_1}{\overline{CA}^2} = \frac{PR \times PR_1}{P} = \frac{QR \times QR_1}{P_1}$$

ou

$$\frac{CR \times CR_1}{\overline{CA}^2} = \frac{(PC + CR)(PC - CR_1)}{P} = \frac{(QC - CR)(QC + CR_1)}{P_1}$$

ou encore

$$\frac{CR \times CR_1}{\overline{CA}^2} = \frac{\overline{PC}^2 + PC(CR - CR_1)}{P + \overline{CA}^2} = \frac{\overline{QC}^2 - QC(CR - CR_1)}{P_1 + \overline{CA}^2}.$$

Au moyen de la dernière égalité, on peut construire

Hosted by Google

$CR - CR_1$, puis au moyen de la première un carré équivalent à $CR \times CR_1$; et, d'après un problème dont la solution est connue, on pourra construire CR et CR_1. Connaissant le diamètre RR_1 de grandeur et de position, on aura le centre : on pourra alors construire le diamètre conjugué qui est parallèle à X_1X, et l'on aura sa longueur désignée par b' d'après l'égalité

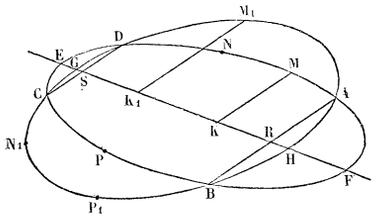
$$\frac{4b'^2}{\overline{RR_1}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{CR \times CR_1},$$

qui se déduit du théorème de Newton.

IV. *Construire les points communs de deux coniques situées dans un même plan, ayant un diamètre commun* CONNU, *divisant en parties égales des cordes de direction donnée.*

Supposons d'abord deux coniques à centre ayant le diamètre commun EF; divisant dans l'une et l'autre en

Fig. 64.



parties égales les cordes parallèles à AB, la position du diamètre étant connue, ainsi que la direction de la corde (*fig.* 64).

Nous pouvons supposer, en outre, la première conique définie par trois points M, N, P, qui, d'après la propriété du diamètre, en font connaître trois autres, et la deuxième par trois autres points M_1, N_1, P_1.

Hosted by Google

D'après le théorème établi au n° VI, Chapitre II, nous pouvons construire un cercle O passant par les points réels ou imaginaires E, F, où la première conique rencontre le diamètre commun, et de même un cercle O_1 passant par les points G, H, où la seconde rencontre le même diamètre.

Si A, B, C, D sont ces points inconnus, la question se ramène à déterminer les cordes communes AB, CD, ou, ce qui revient au même, les points R et S où elles rencontrent EF.

Menons par les points M et M_1 les parallèles à AB, MK, M_1K_1, coupant EF en K et K_1; désignons par P et p les puissances des points R et K par rapport au cercle O, et par P_1 et p_1 les puissances des points R et K_1 par rapport au cercle O_1; nous aurons, d'après le théorème de Newton,

$$\frac{\overline{AR}^2}{P} = \frac{\overline{MK}^2}{p} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{AR}^2}{P_1} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{p_1};$$

d'où, divisant membre à membre,

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{\overline{MK}^2} \times \frac{p}{p_1}.$$

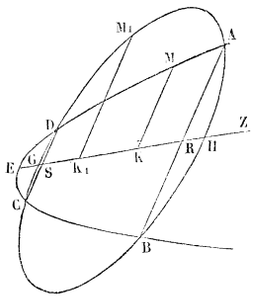
Le rapport des puissances du point R, par rapport aux cercles O et O_1, est donc connu; il en résulte que le point R et le point S, pour lequel il en est de même, se trouvent sur un cercle ayant même axe radical avec les cercles O et O_1; ce cercle peut être construit, comme on l'a fait au n° VI, Chapitre II, et la question est résolue.

Considérons actuellement le cas où l'une des coniques est une parabole; supposons toujours connu le diamètre commun EZ de position et la direction des cordes, telles que AB, qu'il divise en parties égales (*fig.* 65). Suppo-

Hosted by Google

sons la parabole définie par deux points qui en déterminent deux autres, d'après la propriété du diamètre; il est facile de construire le point E où la courbe coupe le diamètre, car il est le centre de l'involution déterminée sur EZ par ses points de rencontre avec les couples de côtés opposés du quadrilatère inscrit, dont les sommets

Fig. 65.



se déduisent des données, son conjugué étant à l'infini. Les points G, H, où la seconde conique rencontre EZ, sont à l'intersection de cette droite et d'un cercle O_1, qu'on peut construire, si l'on connaît trois points de la courbe, comme dans le cas précédent.

Menons, par le point M de la parabole et par le point M_1 de la seconde conique, MK et M_1K_1 parallèles à la direction de AB et coupant EZ en K et K_1, et proposons-nous de trouver les points R, S où les cordes communes parallèles coupent EZ.

D'après la modification du théorème de Newton établie au n° I du présent Chapitre, quand la courbe est une parabole et quand l'une des sécantes est parallèle au diamètre, nous aurons

$$\frac{\overline{AR}^2}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{EK}$$

et, d'après le théorème de Newton lui-même,

$$\frac{\overline{AR}^2}{\overline{RH} \times \overline{RG}} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{\overline{K_1H} \times \overline{K_1G}} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{p_1},$$

si p_1 est la puissance du point K_1 par rapport au cercle O_1.

Divisant membre à membre,

$$\frac{RH \times RG}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{\overline{M_1K_1}^2} \times \frac{p_1}{EK} = a,$$

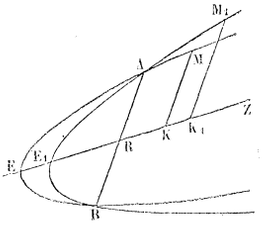
a étant une longueur qu'on peut construire.

D'après cela, le point R et le point S, sur lequel on peut répéter le même calcul, appartiennent au lieu des points dont la puissance par rapport au cercle O_1 et la distance à une droite quelconque passant par E (perpendiculaire à EZ, si l'on veut), comptée parallèlement à EZ, sont dans le rapport a; ce lieu, qu'on a déterminé d'après le théorème II, Chapitre II, n° I, est un cercle, qui peut être construit et dont l'intersection avec EZ donne la solution de la question.

Enfin les deux coniques peuvent être deux paraboles ayant un diamètre commun.

Supposons que ce diamètre soit EZ, divisant en parties

Fig. 66.



égales les cordes parallèles à AB (*fig.* 66); admettons du reste que nous connaissions des éléments en nombre

suffisant pour déterminer ces deux courbes; nous pouvons supposer connus les points E, E_1, où elles rencontrent EZ, et les ordonnées parallèles à AB d'un point de chacune d'elles, soient MK, M_1K_1. D'après ce que nous avons vu au n° I du présent Chapitre, nous aurons les égalités

$$\frac{\overline{AR}^2}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{KE} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{AR}^2}{E_1R} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{E_1K_1}.$$

Divisant membre à membre,

$$\frac{E_1R}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{\overline{M_1K_1}^2} \times \frac{E_1K_1}{EK}.$$

Le second membre est connu, on en déduit la position du point R, connaissant le rapport de ses distances aux points E et E_1; la seconde sécante commune passe à l'infini, la question est complètement résolue.

Remarque importante. — Cette question peut être utilisée pour déterminer exactement les points doubles virtuels de la projection sur un plan de l'intersection de deux quadriques.

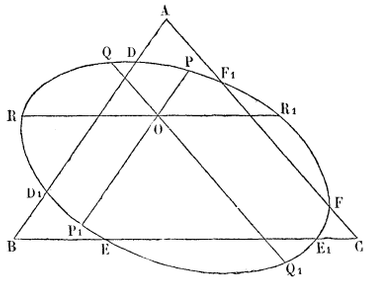
V. Théorème de Carnot. — Si l'on considère une conique et un triangle situés dans un même plan, la conique rencontrant en deux points chaque côté du triangle, le produit des six segments déterminés sur chaque côté entre un sommet du triangle et ses points de rencontre avec la conique, ces segments étant comptés dans le sens du mouvement d'un point qui parcourt le périmètre du triangle sans rétrograder, est égal au produit des six segments comptés de la même manière en sens contraire.

Considérons la conique de la *fig.* 67 coupée par les

Hosted by Google

côtés du triangle ABC aux couples des points D et D_1, E et E_1, F et F_1; par un point O du plan, menons les transversales PP_1, QQ_1, RR_1 respectivement parallèles aux côtés AB, AC, BC du triangle.

Fig. 67.



D'après le théorème de Newton, on a les égalités

$$\frac{AD \times AD_1}{AF \times AF_1} = \frac{OP \times OP_1}{OQ \times OQ_1},$$
$$\frac{BE \times BE_1}{BD \times BD_1} = \frac{OR \times OR_1}{OP \times OP_1},$$
$$\frac{CF \times CF_1}{CE \times CE_1} = \frac{OQ \times OQ_1}{OR \times OR_1};$$

multipliant membre à membre,

$$\frac{AD \times AD_1 \times BE \times BE_1 \times CF \times CF_1}{AF \times AF_1 \times CE \times CE_1 \times BD \times BD_1} = 1,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

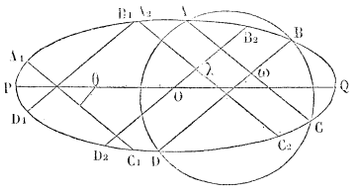
Entre autres usages de ce théorème, on peut s'en servir, quand on connaît cinq points d'une conique, pour déterminer le second point de rencontre, avec cette courbe d'une droite quelconque passant par l'un des cinq points donnés.

Hosted by Google

Propriétés des coniques dont les points communs appartiennent à un cercle.

VI. Soient O (*fig.* 68) une conique; A, B, C, D quatre points communs à cette conique et à un cercle;

Fig. 68.



construisons un des couples de sécantes rectilignes, passant par ces quatre points, soit AC, BD se coupant en ω.

Si par un point quelconque, λ, du plan nous menons les parallèles A_2C_2, B_2D_2 aux droites AC et BD respectivement, les points communs A_2, B_2, C_2, D_2 de ces sécantes avec la conique appartiennent à un même cercle.

En effet, d'après le théorème de Newton, on a l'égalité

$$\frac{\lambda A_2 \times \lambda C_2}{\lambda B_2 \times \lambda D_2} = \frac{\omega A \times \omega C}{\omega B \times \omega D};$$

mais, d'après une propriété connue des sécantes au cercle, le second membre est égal à 1 : donc il en est de même du premier; dès lors, d'après la réciproque de cette propriété, qui est vraie et aussi connue, la proposition énoncée est évidente.

En second lieu, les deux sécantes considérées AC, BD sont également inclinées sur l'un des axes de la courbe, soit PQ.

Hosted by Google

Pour le démontrer traçons la sécante $A_1 C_1$ parallèle à AC, et faisons passer par A_1 et C_1 un cercle dont le centre, θ, soit situé sur l'axe PQ. Ce cercle passera par les points D_1, B_1 respectivement, symétriques de A_1 et C_1, par rapport à PQ; la droite $B_1 D_1$ sera symétrique de $A_1 C_1$ par rapport à PQ ; ces deux droites se couperont sur PQ et seront également inclinées sur cette droite. Il suffit donc de montrer que $B_1 D_1$ est parallèle à BD : or cela est évident; car, si nous menions par B_1 une parallèle à BD, le second point de rencontre de cette droite et de la conique appartiendrait au cercle θ, d'après la proposition précédente, et, si ce second point était distinct de D_1, c'est-à-dire si $B_1 D_1$ n'était pas parallèle à BD, le cercle θ aurait avec la conique cinq points communs et se confondrait avec elle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il résulte de ces deux théorèmes :

1° *Que, si les points communs de deux coniques sont situés sur un cercle, les axes de ces coniques sont parallèles aux bissectrices des angles d'un de leurs systèmes de sécantes rectilignes communs, et, en conséquence, parallèles entre eux ;*

2° *Que, si un des systèmes de sécantes rectilignes communs de deux coniques est composé de deux droites également inclinées sur l'un des axes de l'une d'elles, les points communs des deux coniques appartiennent à un même cercle;* car les points communs de deux parallèles à ces droites menées par un point de l'axe avec la conique correspondante sont symétriques deux à deux par rapport à cet axe et, en conséquence, sur un même cercle;

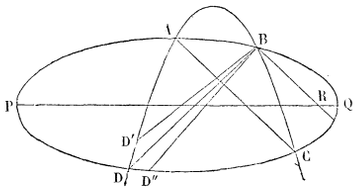
3° *Que, si deux coniques ont leurs axes parallèles, leurs points communs sont situés sur un cercle, et qu'en conséquence leurs couples de sécantes communes sont composés de droites également inclinées sur les axes.*

Hosted by Google

Soient, en effet, deux coniques dont on suppose les axes parallèles, et se coupant aux points A, B, C, D (*fig.* 69).

Faisons passer un cercle par les points A, B, C, et menons par le point B, BR parallèle à AC; soit encore PQ l'un des axes et l'une des coniques, ou une parallèle

Fig. 69.



à cet axe. Si le cercle passant par A, B, C passe également par D, le théorème résulte des propositions précédentes; mais il ne peut en être autrement, car s'il rencontrait les deux coniques en des points différents, soient D' et D'', les trois droites BR, BD', BD'', issues du même point, seraient également inclinées sur une même droite PQ, ce qui est contradictoire avec un théorème connu : la proposition est donc établie.

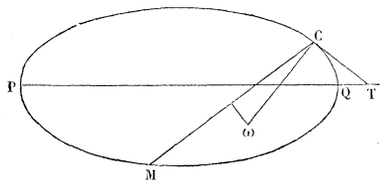
VII. *Construction du cercle osculateur en un point d'une conique.* — Si trois des points communs d'un cercle variable et d'une conique fixe viennent se réunir en un seul, la limite du cercle variable porte le nom de *cercle osculateur* de la conique en ce point C (*fig.* 70).

Dans ce cas, les trois systèmes de sécantes rectilignes qui passent par les quatre points communs de la conique et du cercle se réduisent à un seul composé de la tangente à la conique au point d'osculation, C, et de l droite CM qui unit ce point au quatrième point commun qui en reste séparé. Dès lors, en construisant la

Hosted by Google

tangente CT au point C de la conique, et la droite CM, de telle sorte que les droites CM et CT soient également inclinées sur l'un des axes de la courbe, soit PQ, puis

Fig. 70.



déterminant le point M, où CM rencontre la conique, le cercle osculateur sera défini par les conditions d'être tangent à CT en C et de passer par le point M.

VIII. *Propriétés de certaines sécantes communes au cercle et à l'hyperbole équilatère.* — On donne le nom d'*hyperbole équilatère* à celle dont les asymptotes sont rectangulaires; il en résulte que les axes de cette courbe sont égaux, et qu'il en est de même de deux diamètres conjugués quelconques d'après le second des théorèmes d'Apollonius. Dès lors le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est un losange, et les asymptotes qui en sont les diagonales, n° XVII, Ch. I, sont bissectrices des angles de deux diamètres conjugués.

On donne le nom de *cordes supplémentaires* d'une conique à deux cordes unissant un point de la courbe aux extrémités d'un même diamètre. Il en résulte que deux cordes supplémentaires d'une conique sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués, ceux qui unissent le centre au milieu de chacune de ces cordes, et de là que deux cordes supplémentaires d'une hyperbole équilatère sont également inclinées sur les asymptotes.

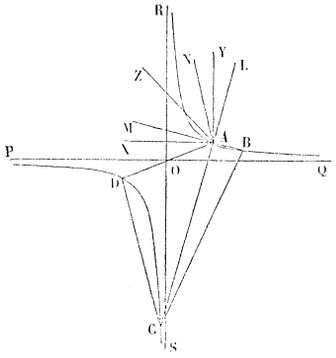
Hosted by Google

De ces définitions ou propositions, et de celles sur les sécantes à une conique et à un cercle on peut déduire la proposition suivante :

Théorème. — *Si l'une des sécantes communes à un cercle et à une hyperbole équilatère passe par le centre de l'hyperbole, la sécante associée passe par le centre du cercle.*

Soient A, B, C, D quatre points communs à l'hyperbole équilatère dont les asymptotes sont PQ et RS, et à un cercle (*fig.* 71); de plus, supposons que la sécante AD passe par le centre O de l'hyperbole.

Fig. 71.



Menons AX, AY respectivement parallèles aux asymptotes PQ, RS; la bissectrice AZ de l'angle XAY est parallèle à un des axes de la courbe et fait avec AY un demi-angle droit. Prolongeons CA suivant AL, BA suivant AM, et menons AN parallèle à CD; AN étant parallèle à la corde CD supplémentaire de CA, AN et AL font des angles égaux avec AY, d'où NAY = YAL; AB et CD étant deux cordes communes de l'hyperbole et

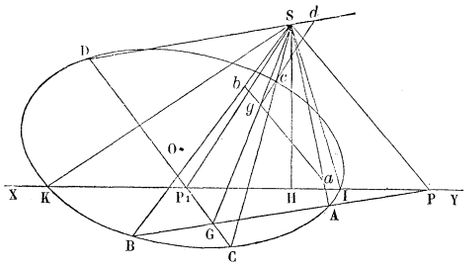
du cercle sont également inclinées sur les axes ; il en résulte que AM, prolongement de BA, et AN, parallèle à CD, font des angles égaux avec AZ, et ZAN = ZAM. Ajoutant membre à membre

$$ZAN + NAY = ZAM + YAL,$$

et le premier membre étant égal à un demi-droit, la somme des deux membres est égale à un angle droit, donc MAL = CAB = 1 droit, et le cercle circonscrit au quadrilatère ABCD a son centre sur BC, ce qu'on voulait démontrer.

IX. *Propriété des sécantes rectangulaires à l'hyperbole équilatère.* — Soit O le cercle directeur et S le sommet d'un cône (*fig.* 72).

Fig. 72.



Supposons-le coupé par un plan suivant une hyperbole équilatère, le plan SXY mené par le sommet du cône parallèlement au plan sécant le coupera suivant les deux génératrices rectangulaires, SI, SK.

Dans le plan de la section imaginons deux droites rectangulaires, l'une sera parallèle à un diamètre transverse et rencontrera les deux branches de la courbe, l'autre sera parallèle à un diamètre non transverse et ne

rencontrera que l'une des branches, soient ces cordes ab et cd. Menons par le sommet S, SP parallèle à ab et SP_1 parallèles à cd; l'une de ces droites sera extérieure à l'angle droit KSI, soit SP, l'autre SP_1 lui sera intérieure, l'angle PSP_1 étant droit.

Le plan des parallèles ab, SP coupe le plan de la directrice suivant la droite PAB, et le cône suivant les génératrices SaA, SbB; celui des parallèles cd, SP_1 coupe le plan de la directrice suivant la droite CP_1D, et le cône suivant les génératrices ScC, dSD; de plus, les cordes rectangulaires, ab, cd, se coupent en un point g de l'intersection SG des deux plans dont on vient de parler. On démontrerait, comme au n° I du présent Chapitre, qu'on a les égalités

$$\frac{ga \times gb}{GA \times GB} = \frac{\overline{SP}^2}{PA \times PB} \times \left(\frac{Sg}{SG}\right)^2,$$

$$\frac{gc \times gd}{GC \times GD} = \frac{\overline{SP_1}^2}{P_1C \times P_1D} \times \left(\frac{Sg}{SG}\right)^2$$

ou, d'après les propriétés des sécantes au cercle,

$$\frac{ga \times gb}{GA \times GB} = \frac{\overline{SP}^2}{PI \times PK} \times \left(\frac{Sg}{SG}\right)^2,$$

$$\frac{gc \times gd}{GC \times GD} = \frac{\overline{SP_1}^2}{P_1I \times P_1K} \times \left(\frac{Sg}{SG}\right)^2.$$

Divisant membre à membre, en ayant égard à la propriété des sécantes au cercle,

$$\frac{ga \times gb}{gc \times gd} = \frac{\overline{SP}^2}{\overline{SP_1}^2} \times \frac{P_1I \times P_1K}{PI \times PK},$$

et, comme l'angle P_1SP est droit, si SH est perpendiculaire sur PP_1, on a

$$\frac{\overline{SP}^2}{\overline{SP_1}^2} = \frac{PH}{P_1H},$$

Hosted by Google

d'où, substituant,

$$\frac{ga \times gb}{gc \times gd} = \frac{\dfrac{P_1I \times P_1K}{P_1H}}{\dfrac{PI \times PK}{PH}}.$$

Or SH est l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles KSI, P_1SP, et l'on sait, d'après ce qu'on a vu au n° I, Chap. II, théorème II, que l'un de ces cercles, le second par exemple, est le lieu des points dont les puissances, par rapport au premier, sont à la distance des mêmes points à leur axe radical dans un rapport constant convenablement choisi.

Il en résulte que les rapports $\frac{P_1I \times P_1K}{P_1H}$, $\frac{PI \times PK}{PH}$ sont numériquement égaux : dès lors le rapport $\frac{ga \times gb}{gc \times gd}$ est numériquement égal à 1; mais, comme les deux segments ga, gb sont de sens contraires, tandis que les deux autres gc, gd sont de même sens, on doit considérer ce rapport comme égal à -1.

De là on peut déduire le théorème suivant :

Si une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle, elle passe par le point commun des hauteurs.

Et comme corollaire :

Si deux hyperboles équilatères ont quatre points communs, elles doivent coïncider, à moins que l'un des points ne soit le point commun des hauteurs d'un triangle dont les trois autres sont les sommets.

X. Théorème de Frégier. — *Si par un point de la circonférence d'un cercle on mène des parallèles à deux diamètres conjugués d'une conique, la droite qui unit les seconds points communs de ces parallèles*

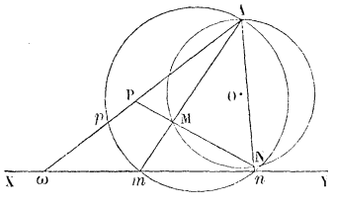
Hosted by Google

avec la circonférence passe par un point fixe qui porte le nom de POINT DE FRÉGIER.

Soient O le cercle donné, A le point donné sur sa circonférence (*fig.* 73).

Menons par le point A les parallèles AM, AN à deux diamètres conjugués d'une conique située dans le même

Fig. 73.



plan; il s'agit de montrer que MN passe par un point fixe.

Les couples de droites, telles que AM, AN, forment un faisceau en involution; transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant A pour pôle et une puissance quelconque K; la circonférence O a pour transformée la droite XY, et les points, tels que m et n, forment une involution, n° III; Chap. II, soit ω le centre de cette involution; unissons $A\omega$ par une droite.

La droite dont MN fait partie a pour transformée la circonférence passant par les points A, m, n, et rencontrant $A\omega$ en p; le point p est fixe à cause de l'égalité $\omega m \times \omega n = \omega A \times \omega p$, le premier membre étant fixe d'après la définition de l'involution. Or nous avons aussi, P étant le point où MN coupe $A\omega$,

$$Ap \times AP = K,$$

d'après notre transformation; le point p et le nombre K étant fixes, il en est de même de P.

Hosted by Google

Le théorème de Frégier est encore vrai si au cercle on substitue une conique, cela se voit en considérant cette courbe comme la perspective d'un cercle.

L'application de ce théorème permet de construire facilement deux rayons d'un faisceau en involution faisant entre eux un angle donné, quand le faisceau est déterminé par deux autres couples de rayons conjugués, et, en particulier, de construire, en direction, deux diamètres conjugués d'une conique, dont on donne le centre, faisant entre eux un angle donné, quand on connaît les directions de deux autres couples de diamètres conjugués. Nous ne nous y arrêterons pas.

Comme seconde application très intéressante, on peut, au moyen de ce théorème, déterminer simplement les rayons conjugués communs à deux faisceaux en involution de même sommet ou, ce qui revient au même, les diamètres conjugués communs de deux coniques concentriques. Il suffit pour cela de faire passer un cercle par le sommet commun des deux faisceaux, de déterminer le point de Frégier relatif à chacun d'eux et d'unir ces deux points par une droite; les points où la droite coupe le cercle appartiennent chacun à un des diamètres conjugués communs. On ramène à cette question celle de la détermination des diamètres conjugués parallèles de deux coniques situées, comme on voudra, dans le même plan.

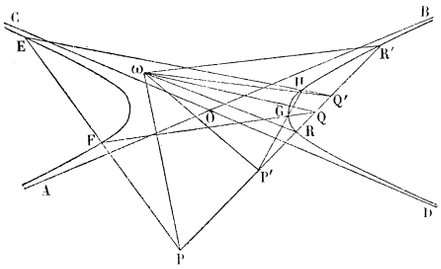
Le point de Frégier s'est présenté spontanément dans la construction que nous avons donnée au Chapitre I, n° VI.

Théorème et applications. — *Si par un point du plan d'un quadrilatère on mène des couples de parallèles aux directions des asymptotes de chacune des hyperboles circonscrites au quadrilatère, ces couples de parallèles forment un faisceau en involution.*

Hosted by Google

Soient EFGH le quadrilatère, AOB, COD les asymptotes d'une hyperbole circonscrite (*fig.* 74). Coupons la figure par une droite quelconque, rencontrant les côtés du quadrilatère en P et P′, Q et Q′, et l'hyperbole

Fig. 74.



en R et R′; puis unissons ces six points à un point fixe ω, pris arbitrairement dans le plan, par des lignes droites. D'après le théorème de Desargues, ces six droites forment un faisceau en involution, et il en sera encore ainsi si la sécante PR′ s'éloigne à l'infini; mais alors les rayons ωP et ωP′, ωQ et ωQ′ deviennent parallèles aux systèmes de côtés opposés au quadrilatère, ωR et ωR′ deviennent parallèles aux asymptotes de l'hyperbole; donc les parallèles aux asymptotes de l'hyperbole menées par le point ω sont deux rayons conjugués du faisceau en involution, déterminé par les systèmes de parallèles aux côtés opposés du quadrilatère menées par le même point, ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème est susceptible d'applications nombreuses par son association à celui de Frégier.

1° *On en déduit les directions des asymptotes de l'hyperbole passant par cinq points.* Il suffit pour cela de construire les rayons conjugués communs à deux faisceaux en involution déterminés en menant par un point

du plan des parallèles aux systèmes de côtés opposés de deux quadrilatères inscrits.

2° *On peut encore construire,* par ce moyen, *une hyperbole passant par quatre points donnés, connaissant l'angle des asymptotes;* on est ramené pour cela à déterminer deux rayons conjugués d'un faisceau en involution comme faisant entre eux un angle donné.

3° Comme cas particulier de la question précédente, on peut *construire une hyperbole équilatère passant par quatre points donnés* en recherchant les rayons conjugués rectangulaires d'un faisceau en involution défini.

On voit ainsi que le problème n'admet généralement qu'une solution; toutefois, et c'est là une REMARQUE IMPORTANTE, *si les couples de côtés opposés du quadrilatère étaient rectangulaires, c'est-à-dire si trois des points étaient sommets d'un triangle dont les hauteurs concourraient au quatrième point, le quadrilatère étant non convexe, les seules coniques qu'on peut lui circonscrire sont des hyperboles; en second lieu, deux des couples de directions asymptotiques, celles des systèmes de côtés opposés, étant rectangulaires, tous les systèmes de rayons conjugués du faisceau sont rectangulaires, et toutes les coniques circonscrites à ce quadrilatère sont des hyperboles équilatères.* Ces dernières conséquences complètent le théorème et le corollaire démontrés à la fin du n° IX du présent Chapitre.

XII. THÉORÈME. — *Si l'on coupe une conique par une hyperbole équilatère, dont les asymptotes soient parallèles aux axes de la courbe, trois des points communs et le point diamétralement opposé au quatrième, dans la conique, sont situés sur un même cercle.*

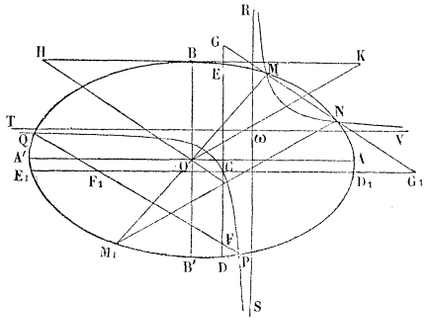
Démontrons le théorème pour le cas où la conique

Hosted by Google

est une ellipse, la démonstration pour le cas où elle est une hyperbole est entièrement analogue, et l'on peut conclure qu'il est vrai pour la parabole, en la considérant comme limite de l'une des courbes précédentes.

Soient O l'ellipse dont les axes sont AA′, BB′ (*fig.* 75); ω l'hyperbole équilatère dont les asymptotes VT, RS

Fig. 75.



sont respectivement parallèles à AA′, BB′. Soient les quatre points communs des deux courbes M, N, P, Q, et M_1 diamétralement opposé à M dans l'ellipse.

Prenons un point quelconque C sur l'hyperbole et menons par ce point des parallèles aux asymptotes; l'ellipse, l'hyperbole et le système des sécantes rectilignes MN, PQ, déterminent sur chacune de ces parallèles un système de six points en involution (théorème de Desargues) et comme dans ces deux involutions le point conjugué de C est à l'infini, C est le centre de chacune d'elles. De là les deux égalités

$$CE \times CD = CF \times CG \qquad \text{et} \qquad CE_1 \times CD_1 = CF_1 \times CG_1.$$

Divisons membre à membre en tenant compte du théo-

Hosted by Google

rème de NEWTON,

$$\frac{CE \times CD}{CE_1 \times CD_1} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{CF \times CG}{CF_1 \times CG_1},$$

en désignant par a et b les demi-axes de l'ellipse.

Unissons M_1N par une ligne droite : MN, M_1N forment un système de cordes supplémentaires, et les diamètres OK, OH, qui les divisent en parties égales et sont chacun parallèles à celle qu'il ne coupe pas, sont conjugués. Ces diamètres interceptent sur la tangente en B les segments BH, BK, dont le produit est égal à a^2 (n° IV, Chap. II) ; de là

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{b}{BH} \times \frac{b}{BK},$$

et, par comparaison avec l'égalité précédente,

$$\frac{CF}{CF_1} \times \frac{CG}{CG_1} = \frac{b}{BH} \times \frac{b}{BK}.$$

Les deux triangles rectangles BOH, GCG_1 sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles, d'où

$$\frac{CG}{CG_1} = \frac{b}{BH};$$

d'après l'égalité précédente, il en résulte

$$\frac{CF}{CF_1} = \frac{b}{BK}.$$

Donc les deux triangles rectangles BOK, CFF_1 sont semblables, leurs angles sont égaux et leurs hypoténuses OK, FF_1 sont également inclinées sur BK et CF_1, ou sur la parallèle AA′; il en est de même de PQ et M_1N parallèle à OK ; donc les points P, Q, N, M_1 appartiennent à un cercle (n° VI du précédent Chapitre).

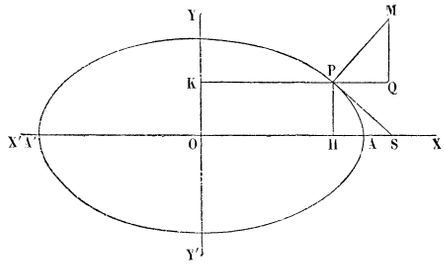
C. Q. F. D.

Hosted by Google

XIII. *Normales à une conique passant par un point donné dans son plan,* THÉORÈME DE JOACHIMSTAHL. — Examinons le cas de l'ellipse, la question se résoudra d'une manière analogue pour les autres courbes.

Soit O une ellipse dont les axes $2a$, $2b$ sont dirigés suivant OX, OY, et à laquelle nous voulons mener une normale par le point M (*fig.* 76).

Fig. 76.



Soit MP une de ces normales; P son point d'incidence, que nous définirons par ses distances PH, PK aux deux axes ; nous représenterons ces distances, ou coordonnées, par y, x respectivement. Nous définirons aussi la position du point M par les distances analogues, β, α; y, x, β, α étant susceptibles de signes.

Menons la tangente PS en P, cette droite rencontrant OX en S; les deux triangles rectangles MPQ, PHS sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires : on en déduit

$$\frac{MQ}{PQ} = \frac{OS - OH}{PH} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\beta - y}{\alpha - x} = \frac{OS - x}{y}.$$

Mais les points H, S étant conjugués harmoniques par rapport à A, A', on a

$$\overline{OA}^2 = OS \times OH, \qquad \text{d'où} \qquad OS = \frac{a^2}{x};$$

remplaçant,

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha}=\frac{\frac{a^2}{x}-x}{y}=\frac{a^2-x^2}{xy}.$$

D'après le n° II du présent Chapitre, on a

$$a^2-x^2=\frac{a^2}{b^2}y^2;$$

substituant,

$$(1)\qquad \frac{y-\beta}{x-\alpha}=\frac{a^2y}{b^2x}.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(a^2-b^2)xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0$$

ou

$$(2)\qquad \left(y+\frac{b^2\beta}{a^2-b^2}\right)\left(x-\frac{a^2\alpha}{a^2-b^2}\right)=\frac{-a^2b^2\alpha\beta}{a^2-b^2}.$$

Si nous construisons les parallèles à OY, OX, situés à des distances du point O respectivement représentées par $\frac{a^2\alpha}{a^2-b^2}$, $\frac{-b^2\beta}{a^2-b^2}$, les facteurs $x-\frac{a^2\alpha}{a^2-b^2}$, $y+\frac{b^2\beta}{a^2-b^2}$, représentent les distances du point P à ces deux parallèles.

Il résulte de la relation (2) que le produit de ces distances est constant, et, d'après le premier des théorèmes d'Apollonius, que le point P se trouve sur une hyperbole équilatère ayant ces parallèles pour asymptotes.

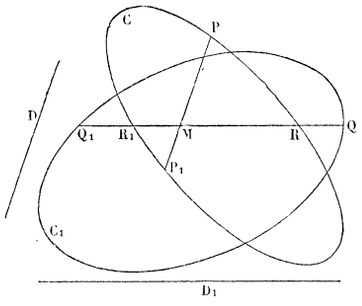
La relation (1) étant visiblement satisfaite pour le point M et pour le point O, ces deux points appartiennent à l'hyperbole équilatère. On peut construire cette courbe dont on connaît les asymptotes et deux points; ses points communs avec l'ellipse feront connaître les points d'incidence des normales issues de P, qui sont en général au nombre de quatre.

Hosted by Google

On peut conclure du théorème du numéro précédent, que : *trois des points d'incidence des normales menées d'un point à une conique et le point diamétralement opposé au point d'incidence de la quatrième, dans cette conique, appartiennent à un même cercle;* c'est là le THÉORÈME DE JOACHIMSTAHL.

XIV. LIEU GÉOMÉTRIQUE. — *Étant données deux coniques* C *et* C_1, *ainsi que deux directions* D *et* D_1, *dans le même plan; par un point* M *du plan on mène deux parallèles, la première à la direction* D, *rencontrant la conique* C *aux points* P *et* P_1, *la deuxième à la droite* D_1, *rencontrant la conique* C_1 *aux points* Q *et* Q_1; *on demande de déterminer le lieu du point* M *par la condition que le produit* $MP \times MP_1$ *ait avec le produit* $MQ \times MQ_1$ *un rapport donné* α (*fig.* 77).

Fig. 77.



Soient R et R_1 les points où la parallèle à D_1 passant par M rencontre la conique C, pour tous les points du plan, et, d'après le théorème de Newton, on a, β étant un nombre fini,

$$\frac{MP \times MP_1}{MR \times MR_1} = \beta.$$

Hosted by Google

Si, en outre, M est un point du lieu, on a aussi

$$\frac{MP \times MP_1}{MQ \times MQ_1} = \alpha.$$

Divisant membre à membre, on en conclut que, pour tous les points M du lieu,

$$\frac{MQ \times MQ_1}{MR \times MR_1} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

D'après cette égalité, le rapport involutif d'un point M du lieu, par rapport aux couples de points de rencontre d'une droite de direction donnée avec les coniques C et C_1, est constant, et il en résulte, d'après le théorème du n° VII du Chap. II, que le lieu est une conique passant par les points communs des deux premières.

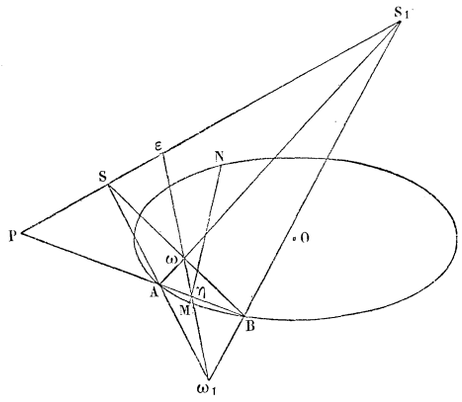
XV. *Si deux cônes ont pour directrice une même conique, ils se coupent suivant une seconde courbe plane, qui est une autre conique* (1). — Soient S et S_1 les sommets des deux cônes ayant pour directrice la conique O (*fig.* 78); unissons S_1S par une ligne droite coupant le plan de la directrice en P. Par la droite SS_1 faisons passer un plan variable coupant celui de la directrice suivant la droite PAB et les deux cônes suivant les deux couples de génératrices SA et SB, S_1A et S_1B. Ces deux couples de génératrices se coupent aux points A, B, ω, ω_1; les points A, B décrivent la directrice, les points ω, ω_1 la seconde partie de l'intersection qu'il faut démontrer être plane.

(1) Depuis ma rédaction, je me suis aperçu que la démonstration géométrique de ce théorème se trouvait dans le *Cours de Géométrie descriptive* de M. Ch. Brisse, IIe Partie, p. 92.

Hosted by Google

Or la droite $\omega_1\omega$ est la polaire de P par rapport aux deux droites $\omega_1 S$, $\omega_1 S_1$; il en résulte que les points ε, η, où elle rencontre PS_1 et PB, sont conjugués harmoniques de P par rapport aux couples de points S et S_1,

Fig. 78.



A et B; le point ε est fixe, puisque P, S et S_1 le sont, et quant à η il décrit la polaire MN de P par rapport à la conique; les points ω, ω_1 sont donc situés dans le plan εMN qui est fixe, et, en conséquence, la courbe qu'ils décrivent est plane.

XVI. Note. — Le théorème de Pappus nous a servi au n° VI, Chap. II, pour établir un théorème important par ses conséquences, soit pour fournir une construction relativement simple des points communs d'une conique et d'une droite, soit pour établir d'une manière immédiate le théorème de Desargues.

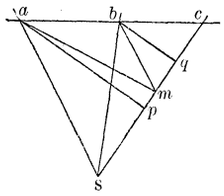
Il nous a paru intéressant de montrer comment, du même théorème de Pappus se déduit le principe de description d'une conique par le point d'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux homogra-

Hosted by Google

phiques, et c'est là le but de la présente Note, par laquelle nous allons terminer notre étude.

Lemme I. — *Considérons un faisceau de trois droites issues d'un point* S (*fig.* 79), *et une sécante qui les rencontre en* a, b, c; *le rapport des segments* ca, cb

Fig. 79.



est égal à celui des aires des triangles Sam, Sbm *ayant pour bases les rayons* Sa, Sb, *et pour sommet un point* m *quelconque situé sur le rayon* Sc.

En effet, les deux triangles Sac, Sbc, considérés comme ayant leur sommet en S, ont même hauteur et sont proportionnels à leurs bases; et, si on les considère comme ayant leurs sommets en a et b, ils ont même base et sont proportionnels à leurs hauteurs, d'où les égalités

$$\frac{ca}{cb} = \frac{\mathrm{S}ac}{\mathrm{S}bc} = \frac{ap}{bq},$$

ap et bq étant les perpendiculaires menées de a et b sur Sc.

D'ailleurs, les deux triangles amS, bmS ont aussi même base et pour hauteurs ap et bq respectivement; dès lors,

$$\frac{ap}{bq} = \frac{ma\mathrm{S}}{mb\mathrm{S}},$$

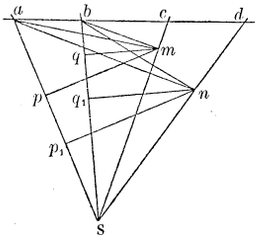
et, par comparaison avec les égalités précédentes, on a

$$\frac{ca}{cb} = \frac{ma\,\mathrm{S}}{mb\,\mathrm{S}},$$

ce qu'on voulait démontrer.

Lemme II. — *Le rapport anharmonique des quatre points a, b, c, d, où une droite coupe les rayons d'un faisceau* S.*abcd* (*fig.* 80), *soit* $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$, *est égal au rap-*

Fig. 80.



port des rapports des distances de deux points m et n pris arbitrairement sur les rayons Sc, Sd, *aux rayons* Sa *et* Sb, *respectivement, soit* $\frac{mp}{mq} : \frac{np_1}{nq_1}$, mp, np_1 *étant perpendiculaires sur* Sa, *et* mq, nq_1 *perpendiculaires sur* Sb.

En effet, et d'après le lemme I, on a

$$\frac{ca}{cb} = \frac{ma\,\mathrm{S}}{mb\,\mathrm{S}}$$

et

$$\frac{da}{db} = \frac{na\,\mathrm{S}}{nb\,\mathrm{S}};$$

divisant membre à membre,

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{ma\,\mathrm{S}}{mb\,\mathrm{S}} : \frac{na\,\mathrm{S}}{nb\,\mathrm{S}},$$

Hosted by Google

ou

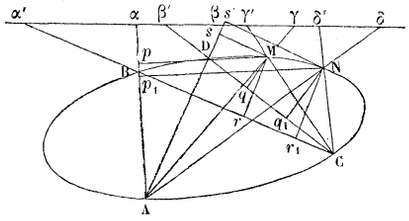
$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{maS}{naS} : \frac{mbS}{nbS};$$

mais les couples de triangles maS et naS, mbS et nbS ont mêmes bases et sont proportionnels à leurs hauteurs; donc, substituant aux rapports de ces triangles ceux de leurs hauteurs dans la deruière égalité, on a

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{mp}{mq} : \frac{np_1}{nq_1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Soit actuellement une conique ABDMNC : construisons deux faisceaux ayant pour sommets deux points A et C de la conique, et dont les rayons homologues se coupent sur cette courbe en B, D, M, N (*fig.* 81); il

Fig. 81.



s'agit de montrer qu'ils sont homographiques, c'est-à-dire que les deux faisceaux A.BDMN, C.BDMN, ont même rapport anharmonique. Pour le démontrer, coupons les deux faisceaux par la transversale α', δ, et des points M et n abaissons Mp, Np_1 perpendiculaires sur AB, de même, Mq, Nq_1 sur DC; Mr, Nr_1 sur BC; Ms, Ns_1 sur AD; il suffit de montrer l'égalité des deux rapports anharmoniques $\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta}$ et $\frac{\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta'} : \frac{\delta'\alpha'}{\delta'\beta'}$.

Or, d'après le lemme précédent,

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{Mp}{Ms} : \frac{Np_1}{Ns_1}$$

et

$$\frac{\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta'} : \frac{\delta'\alpha'}{\delta'\beta'} = \frac{Mr}{Mq} : \frac{Nr_1}{Nq_1};$$

dès lors, il suffit d'établir,

$$\frac{Mp}{Ms} : \frac{Np_1}{Ns_1} = \frac{Mr}{Mq} : \frac{Nr_1}{Nq_1}$$

ou

$$\frac{Mp}{Ms} : \frac{Mr}{Mq} = \frac{Np_1}{Ns_1} : \frac{Nr_1}{Nq_1},$$

ce qui est évident d'après le théorème de Pappus, ABCD constituant un quadrilatère inscrit, et d'après les égalités

$$Mp \times Mq = \alpha Mr \times Ms$$

et

$$Np_1 \times Nq_1 = \alpha Nr_1 \times Ns_1,$$

lues sous les formes

$$\frac{Mp}{Ms} : \frac{Mr}{Mq} = \alpha = \frac{Np_1}{Ns_1} : \frac{Nr_1}{Nq_1}.$$

FIN.

Hosted by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT..... 1

Introduction.

Numéros.

1 et 2. Définitions. Division harmonique d'un segment de droite, différentes manières de l'exprimer.... 3

3. Faisceaux harmoniques. Propriétés des segments des sécantes rectilignes à un faisceau harmonique. 6

4. Définition et propriétés simples du quadrilatère complet..... 9

5 et 6. Pôle et polaire par rapport au cercle; propriétés.. 10

CHAPITRE I.

I. *Définitions; classification des sections coniques en trois genres*..... 14

II à IV. *Du centre et des diamètres dans l'ellipse; premières propriétés de direction.* — Centre, diamètres, diamètres conjugués; propriété de liaison de deux diamètres conjugués..... 16

V à VII. Axes de l'ellipse, second système de sections circulaires. Construction de deux diamètres conjugués faisant un angle donné. Lemme..... 21

VIII. *Premières propriétés métriques des diamètres de l'ellipse. Théorèmes d'Apollonius*..... 27

IX à XI. *Du centre et des diamètres dans la parabole.* — Le centre de la parabole passe à l'infini; les diamètres de la parabole sont parallèles; propriétés des diamètres de la parabole..... 29

XII à XIV. *Du centre et des diamètres dans l'hyperbole; premières propriétés de direction.*— Centre, diamètres, diamètres conjugués, sur deux diamètres conjugués l'un rencontre la courbe et l'autre ne la rencontre pas. Propriété de liaison de deux diamètres conjugués. **Asymptotes**..... 32

Hosted by Google

Hosted by Google